Samuel Robyr
Étudiant EPFL

Section : **CMS**

RÉSUMÉS CMS

L'essentiel pour réussir

Version finale 1.0a
10.06.2001

Mathématique

Physique

Chimie

Informatique

Samuel Robyr
Av. d'Yverdon 3
1004 Lausanne
076/565.39.23
samuel.robyr@epfl.ch

Composition et mise en page sous $\LaTeX\,2_{\varepsilon}$.

Ce document a été produit avec MiKTeX, un environnement $\TeX$ pour Windows.
Pour plus d'informations a propos de ce logiciel très puissant et gratuit, consultez le site web http ://www.miktex.org.

Préface

Ce document est un résumé des cours du CMS (Cours de Mathématiques Spéciales).
Il est destiné surtout aux étudiants du CMS, mais il peut aussi être tranquillement utilisé comme référence par d'autres étudiants d'autres sections du EPFL ou d'autres écoles.

Je veux ajouter que je suis responsable de toutes les erreurs que vous pourriez trouver dans ce document. Pour ce motif je vous prie de me fournir les corrections nécessaires.
Si vous avez des suggestions concernant ce qui pourrait être ajouté, supprimé ou modifié dans ce document contactez-moi.

Plusieurs personnes ont fourni des corrections et des suggestions pour améliorer ce document. Qu'ils en soient ici remerciés sincèrement.

J'ai remarqué que quelque imprimante n'imprime pas correctement certaines symboles mathématiques (matrices, signe d'intégration, ...).
Ceci est dû à votre imprimante et à ça configuration. Dans les annexes j'ai ajouté une page de test à utiliser pour trouver la juste configuration de votre imprimante.
Si après plusieurs essais vous n'arrivez pas au bon résultat, essayez à télécharger les dernier drivers de l'imprimante, à consulter son manuel ou à contacter le service technique.

Samuel Robyr

Table des matières

Première partie

Algèbre linéaire

Chapitre 1

Ensembles

1.1 Propriétés

- $x \in E$: x appartient à E (relation d'appartenance) ;
- $x \notin E$: x n'appartient pas à E ;
- $A \subset E$: A est inclus dans E ($\forall\, x \in A, x \in E$) ;
- $A \not\subset E$: A n'est pas inclus dans E ($\forall\, x \in A, x \notin E$) ;
- $\emptyset$: l'ensemble vide. C'est un ensemble qui ne contient aucun élément ($\forall\, x, x \notin \emptyset$) ;
- $A \cup B$: est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A *ou* dans B ;
- $A \cap B$: est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A *et* dans B ;
- $C_E A = \overline{A}$: complémentaire de A ($x \in E | x \notin A$) ;
- $\wp(A)$: l'ensemble des parties de A. Est l'ensemble des sous-ensemble de E qui sont inclus dans A ($B \subset E | B \subset A$).
- $A \times B$: est le produit cartésien de A par B.

Remarque 1.1.1. On définit souvent un sous-ensemble A d'un ensemble E (référentiel) à l'aide d'une propriété P définie sur les éléments de E : $A = \{x \in E | x \text{ vérifie } P\}$.

1.2 Symboles logiques et ensembles

Soient P et Q deux propriétés définies sur un référentiel E. On définit les deux sous-ensembles de E :

- $A = \{x \in E | x \text{ vérifie } P\}$
- $B = \{x \in E | x \text{ vérifie } Q\}$

$\forall\, x \in A, x$ vérifie P	$A = E$
$\exists\, x \in A, x$ vérifie P	$A \neq \emptyset$
$P \Rightarrow Q$	$A \subset B$
$P \Leftrightarrow Q$	$A = B$
P ou Q	$A \cup B$
P et Q	$A \cap B$

1.3 Négation de quelques proposition

- *non*(P ou Q) est équivalent à (*non* P) et (*non* Q)
- *non*(P et Q) est équivalent à (*non* P) ou (*non* Q)
- *non*($\forall\ x \in E, x$ vérifie P) est équivalent à ($\exists\ x \in E, x$ ne vérifie pas P)
- *non*($\exists\ x \in E, x$ vérifie P) est équivalent à ($\forall\ x \in E, x$ ne vérifie pas P)

Chapitre 2

Logique et méthodes de preuve

2.1 Introduction

Soient P et Q deux propriétés définies sur un référentiel E. On peut définir sur E la proposition $P \Rightarrow Q$. On peut aussi définir, sur le même référentiel E, la proposition réciproque $Q \Rightarrow P$.

2.2 Méthode de preuve directe

On veut démontrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie.
On construit une suite de proposition : $P \Rightarrow P_1, P_1 \Rightarrow P_2, \ldots, P_n \Rightarrow Q$ qui sont toutes des propositions vraies.
Par transitivité de l'implication on en déduit que la proposition est vraie.

2.3 Méthode de preuve indirecte (contraposée)

On appelle proposition contraposée de $P \Rightarrow Q$ la proposition $(non\ P) \Rightarrow (non\ Q)$.
Comme pour la méthode directe on construit une suite de proposition : $non\ P \Rightarrow P_1, \ldots, P_n \Rightarrow non\ Q$ qui sont toutes des propositions vraies.
Par transitivité de l'implication on en déduit que la proposition est vraie.

Ces deux propositions sont équivalentes : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non\ P \Rightarrow non\ Q)$.

2.4 Méthode par l'absurde

La démonstration par l'absurde de $P \Rightarrow Q$ consiste à supposer $non\ Q$ vraie. Le cadre de référence de la preuve contient alors P mais aussi $non\ Q$.
On essaie alors de montrer que ceux nouveaux système engendre une proposition contradictoire S (S et $non\ S$ vraies).
La supposition de départ $non\ Q$ vraie est fausse, donc Q est vraie.

2.5 Méthode par induction ou récurrence

La méthode par récurrence peut s'utiliser dans le cas où la proposition Q dépend d'un entier positif n : $Q(n), n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.5.1 (d'induction). *Si une proposition $Q(n), n \in \mathbb{N}$, vérifie les deux conditions suivantes :*

1. $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} | Q(n_0)$ *est vraie ;*
2. $\forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, Q(n)$ *vraie* $\Rightarrow Q(n+1)$ *vraie.*

Alors $\forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, Q(n)$ *est vraie.*

D'où la méthode de démonstration :

1. On vérifie que la proposition Q est vraie pour une valeur particulière (la plus petite possible)
2. On démontre la proposition suivante :
   - Hypothèse : $n \geq n_0,\ Q(n)$ vraie
   - Conclusion : $Q(n+1)$ est vraie

Chapitre 3

Combinatoire

3.1 Arrangements

Définition 3.1.1. Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée [1] $(x_1, \ldots, x_p)$ de p éléments de E :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

3.2 Permutations

Définition 3.2.1. Une permutation est une suite ordonnée $(x_1, \ldots, x_p)$ des n éléments de E.

Remarque 3.2.1. Une permutation est un cas particulier d'arrangements $(n = p)$.

$$\boxed{P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!}$$

3.3 Combinaisons

Définition 3.3.1. On appelle combinaison de p de E tout sous-ensemble de E à p éléments.

Si E est un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}^*,\ p \leq n$ on sait qu'il y a A_n^p arrangements de p éléments de E. On regroupe tout ces arrangements de telle sorte que tous éléments d'un groupe soient constitués des mêmes éléments de E[2].
Il y aura P_p arrangements dans chaque groupe.

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

Remarque 3.3.1. $A_n^p = C_n^p \cdot P_p$

Propriétés

1. $C_n^p = C_n^{n-p}, 0 \leq p \leq n$
2. $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p, 0 < p < n$

---

[1] $(1;2;3) \neq (1;3;2)$
[2] $(1;2;3) = (1;3;2)$

3. $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

3.4 Le triangle de Pascal

n, p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

3.5 Le binôme de Newton

On considère la polynôme $P_n(x) = (x+a)^n$ (binôme de Newton). Les coefficients des termes sont les coefficients du triangle de Pascal. On a l'expression générale :

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot a^k$$

Le $(p+1)$ième terme du développement de $(x+a)^n$ est $C_n^p \cdot x^{n-p} \cdot a^p$.

Chapitre 4

Applications

Définition 4.0.1. f est une application de A dans B si à *tout élément* x de A, f fait correspondre un *unique élément* $f(x)$ de B, appelé image par f de x.

A est l'ensemble de départ de f et B est l'ensemble d'arrivée.

4.1 Définitions et relations

– Imf. Est l'ensemble image de f :

$$Imf = \big\{x' \in B \mid \exists\, x \in A, f(x) = x'\big\}$$

– $f(K)$. Soit $K \subset A$, on définit $f(K)$ l'image de K par f :

$$f(K) = \big\{x' \in B \mid \exists x \,\in K, f(x) = x'\big\}$$

Remarque 4.1.1. $Imf = f(A)$

– $f^{-1}(H)$. Soit $H \subset B$, on définit $f^{-1}(H)$ l'image réciproque (ou inverse) de H :

$$f^{-1}(H) = \{x \in A \mid f(x) \in H\}$$

– G_f. Est le graphe de f :

$$G_f = \big\{\big(x, x'\big) \in A \times B \mid x \in A \text{ et } x' = f(x)\big\}$$

– Id_a. Est l'application identité sur A :

$$\begin{aligned} Id_a : A &\;\rightarrow\; A \\ x &\;\mapsto\; x \end{aligned}$$

– $g \circ f$ composition des applications f et g :

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\;\rightarrow\; D \\ x &\;\mapsto\; g \circ f(x) = g\,[f(x)] \end{aligned}$$

4.2 Injection

Définition 4.2.1. Une application f de A dans B est une injection ssi *deux éléments distincts de A ont pour image deux éléments distincts de B* :

$$\forall\, x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Pour montrer que f est injective on utilise le contraposée de la définition :

$$\boxed{\forall\, x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y}$$

Remarque 4.2.1. $x = y$ doit être la seule solution !

4.3 Surjection

Définition 4.3.1. Une application f de A dans B est une surjection ssi *tout élément de B est l'image par f d'au moins un élément A* (x' possède un antécédent dans A) :

$$\forall\, x' \in B, \exists\, x \in A, x' = f(x)$$

Pour montrer que f est surjective on utilise la définition et on montre que pour un x' donné quelconque de B, on peut trouver un x dans A t.q. $x' = f(x)$. L'ensemble des x' de B qui ont au moins un antécédent dans A est $Im\, f$. D'où l'équivalence suivante :

$$\boxed{f \text{ surjective } \Rightarrow\ Imf = B}$$

4.4 Bijection

Définition 4.4.1. Une application f de A dans B est une bijection ssi elle est bijective *et* surjective.

En d'autre termes f de A dans B est bijective ssi tout $x' \in B$ est l'image par f d'un *unique* élément x de A :

$$\forall\, x' \in B, \exists!\ ^{1}\ x \in A, x' = f(x)$$

Dans se cas et seulement dans ce cas, on définit une application réciproque (inverse) de f notée f^{-1} de B dans A.

Remarque 4.4.1. Soient A et B deux ensembles quelconques, on dit que A et B «ont le même nombre d'éléments» (même cardinalité) ssi il existe une bijection de A dans B.

[1] ∃! signifie 'il existe un unique'

Chapitre 5

Matrices

5.1 Produit matriciel

Soient $A\,(a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times p}$ et $B\,(b_{ij}) \in \mathbb{M}_{p\times r}$. Le produit de A par B (noté AB) est la matrice $B \in \mathbb{M}_{n\times r}$ définie par :

$$C = AB = C\,(c_{ij})$$

avec $c_{ij} = a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + \cdots + a_{ip}\,b_{pj}$.

Remarque 5.1.1. Le produit n'est défini que si le *nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.*

5.1.1 Propriétés

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $A(B+C) = AB + AC$ et $(B+C)A = BA + CA$;
3. – $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) = (AB)\lambda$;
   – $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
4. $AB \neq BA$;
5. $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$;
6. $AB = AC$ n'implique pas $B = C$;
7. $AI = IA = A$, avec I élément neutre ;

Définition 5.1.1 (Matrice scalaire). La matrice scalaire $A = a \cdot I_n$ commute avec toute matrice ($a \in \mathbb{R}$).

Définition 5.1.2 (Matrice transposée). La matrice transposée, notée A^t, est la matrice où on échange les lignes avec les colonnes.

Propriétés des matrices transposées

- $\left(A^t\right)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
- $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

5.2 Matrice Inverse

La matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notée A^{-1} existe ssi $\det(A) \neq 0$, et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\ A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Remarque 5.2.1. Pour les matrices inverses d'ordre ≥ 3 voir la section 6.5, page 32

Chapitre 6

Déterminants

6.1 Déterminants d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On définie le nombre réel det $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

6.2 Déterminants d'ordre 3

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

6.3 Déterminants d'ordre n

Un déterminant d'ordre n se calcule à l'aide de n déterminants d'ordre $(n-1)$, en développant selon une ligne ou une colonne.

Remarque 6.3.1. Soit $k \in \mathbb{R}$ et A est une matrice carrée d'ordre n ; on a

$$\boxed{\det(kA) = kn \cdot \det(A)}$$

6.4 Propriétés

Remarque 6.4.1. Toutes les propriétés suivantes sont valables pour les déterminants de tout ordre.

- $\det(\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}', \vec{b}, \vec{c}) = \lambda \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu \det(\vec{a}', \vec{b}, \vec{c})$;
- Un déterminant avec deux colonnes égales vaut 0 : $\det(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$;
- Si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres le déterminant ne change pas : $\det(\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
- Si on permute deux colonnes le déterminant change de signe : $\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
- On peut remplacer les colonnes par les lignes : $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^t = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, mais $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linéairement dépendants $\Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

6.5 Inversibilité, calcul de la matrice inverse

$$\boxed{A \text{ est inversible } \Leftrightarrow \det A \neq 0}$$

Si A^{-1} existe alors :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det\ A}\left((-1)^{i+j}\det\left(A_{ij}\right)\right)^t}$$

$(-1)^{i+j}\det\left(A_{ij}\right)$ est la matrice des cofacteurs de A, on la note $\widetilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\ A}\widetilde{A}^t$$

Si A^{-1} existe alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det\ A}$$

Remarque 6.5.1. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Remarque 6.5.2. $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

Chapitre 7

Espaces vectoriels

7.1 Définition et propriétés

Soit V un ensemble muni de deux lois :
- Une loi de composition interne $+$ (addition) :

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ \left(\vec{a},\ \vec{b}\right) & \mapsto & \vec{a} + \vec{b} \end{array}$$

- Une loi de composition externe $\cdot$ (amplification par un scalaire) :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (\lambda,\ \vec{a}) & \mapsto & \lambda + \vec{a} \end{array}$$

7.1.1 Propriétés de la loi de composition interne

- commutativité : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- associativité : $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
- élément neutre : $\exists\ \vec{0} \in V$ t.q. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- opposé : $\exists\ -\vec{a} \in V$ t.q. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

7.1.2 Propriétés de la loi de composition externe

- distributivité : $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
- associativité : $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda\,(\mu\vec{a})$
- élément neutre : $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- distribution mixte : $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

Les éléments de V sont appelés des vecteurs. Les élément de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement d'un corps) sont appelés des scalaires.

7.1.3 Autres propriétés

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{a} = \vec{0}$

7.2 Combinaison linéaire

Soient V un $\mathbb{R}$-e.v. et $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ n vecteurs de V. On dit que $\vec{b}$ est une combinaison linéaires des $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ s'il existent $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1, \ldots, \lambda_n\vec{a}_n$. On dit que $\vec{b}$ est engendré par les $\vec{a}_i$. V est un $\mathbb{R}$-e.v., donc $\vec{b}$ est dans V par stabilité des lois internes et externes.

Soient V un $\mathbb{R}$-e.v. et $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ n vecteurs de V. On dit que $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sont linéairement dépendants si l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres, sinon il sont linéairement indépendants.

La famille $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ est dite libre si les vecteurs sont indépendants, sinon elle est dite liée.

$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ sont linéairement dépendants ssi il existent $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tel que $\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Inversement $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ sont linéairement indépendants ssi
$\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

7.3 Sous-espaces vectoriels

Un sous-ensemble W d'un espace vectoriel V est un sous-espace vectoriel de V si W, muni des mêmes lois que V, est lui aussi un espace vectoriel.

W sous-ensemble de V est sous-espace vectoriel de V ssi

$$\boxed{\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in W,\ \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \in W.}$$

Soit $S = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ une famille de n vecteurs d'un e.v. V. Alors W, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs, est un sev de V et c'est le plus petit sev de V contenant tous les vecteurs. On le note $W = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]_{sev}$.

On dit que W est le sev engendré par les $\vec{a}_i$. Les $\vec{a}_i$ sont appelés les *générateurs* de W.

7.4 Base et dimension d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il peut être engendré par un nombre fini de générateurs, sinon il est dit de dimension infinie.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, on appelle base de V toute famille ordonnée de générateurs de V linéairement indépendants.

Notation : $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$

Soit V un e.v. de dimension finie. Toutes les bases de V ont même nombre d'éléments. On appelle dimension d'un e.v. V le nombre d'éléments d'une base de V.

Notation : $dim\ V$.

La base canonique (ou naturelle) d'un e.v. V est la base déduite de l'expression générale d'un vecteur de V.

Chapitre 8

Applications linéaires

8.1 Définition

Définition 8.1.1. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. f est une application linéaire de E dans F ssi :

$$\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E, f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

et

$$\forall\ \vec{x} \in E, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

Les 2 relations son équivalentes à :

$$\boxed{\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E, \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})}$$

8.2 Image directe er réciproque

Théorème 8.2.1. *Soient E et F deux e.v. et $f : E \to F$ une application linéaire. Si W est un sev de E alors $f(W)$ est un sev de f.*

Théorème 8.2.2. *Soient E et F deux e.v. et $f : E \to F$ linéaire. Soit $W = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]_{sev}$, alors $f(W) = [f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_n)]_{sev}$*

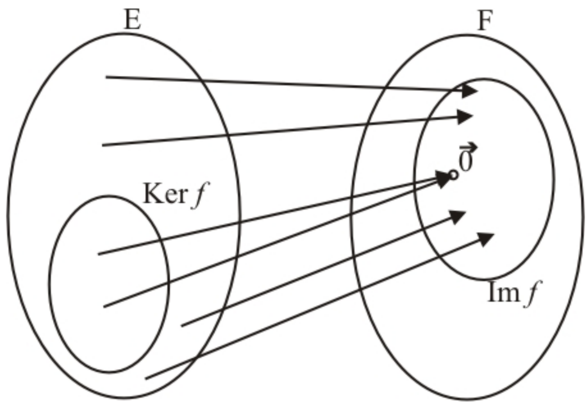
Cas particulier

$$\boxed{Im\, f = [f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)]_{sev}}$$

Théorème 8.2.3. *Soient E et F deux e.v. et $f : E \to F$ linéaire. Si U est un sev de F alors $f^{-1}(U)$ est un sev de E.*

Définition 8.2.1. Soient E et F deux e.v. et $f : E \to F$ linéaire. Le sev de E défini par $f^{-1}\left(\vec{0}\right)$ est appelé le noyau de f, et on le note $Ker\, f$.

$$Ker\, f = \left\{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$$



Théorème 8.2.4 (de la dimension). *Soient E, F 2 e.v. et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}\ f) + \dim(\mathrm{Ker}\ f) = \dim E}$$

8.3 Matrice d'une application linéaire

Théorème 8.3.1. *A toute application linéaire f d'un e.v. E de dim n dans un e.v. F de dim p, on peut associer un matrice de type $p \times n$ dépendante des bases choisies dans E et dans F.*
Inversement, à toute matrice $(a_{ij})_{p\ \times n}$ on peut associer une application linéaire f d'un e.v. E de dim n dans un e.v. F de dim p.

$$X' = \mathbb{M}_f \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

X est la matrice des composantes de $\vec{x}$
X' est la matrice des composantes de $\vec{x}'$.

Remarque 8.3.1. $\boxed{\mathrm{Ker}\ f : \mathbb{M}_f \cdot \vec{x} = \vec{0}}$.

8.3.1 Opérations sur les application linéaires

Proposition 8.3.1. *Soient E un e.v. de base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, F un e.v. de base $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$, f et g deux applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Relativement à ces bases :*
- *la matrice de $(f + g) = \mathbb{M}_{f+g} = \mathbb{M}_f + \mathbb{M}_g$;*
- *la matrice de $(\lambda f) = \mathbb{M}_{\lambda f} = \lambda \mathbb{M}_f$.*

Théorème 8.3.2. *Soient E un e.v. de dim n et de base B_E, F un e.v. de dim p et de base B_F, G un e.v. de dim q et de base choisie B_G, f une application linéaire de E dans F et de matrice $\mathbb{M}_f$ relativement aux bases B_E et B_F, et g une application linéaire de F dans G et de matrice $\mathbb{M}_g$ relativement aux bases B_F et B_G. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G et sa matrice relativement aux bases B_E et B_G est :*

$$\boxed{\mathbb{M}_{g \circ f} = \mathbb{M}_g \cdot \mathbb{M}_f}$$

8.4 Applications linéaires bijectives

Proposition 8.4.1. *Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors on a l'équivalence suivante :*

$$\boxed{f \text{ injective} \Leftrightarrow Ker\ f = \vec{0}}$$

Remarque 8.4.1. Soit $f : E \to F$ linéaire. Si f est surjective alors $\dim E \geq \dim F$.

Proposition 8.4.2. *Soit $f : E \to F$ linéaire. Si f est bijective alors dim E = dim F.*
La réciproque est évidemment fausse.

Théorème 8.4.1. *Soient E un e.v. de base $B_E(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ (dim $E = n$), F un e.v. de base $B_F(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ (dim $F = n$), $f : E \to F$ linéaire, et $\mathbb{M}_f$ la matrice de f relativement à B_E et B_F. Alors*

$$\boxed{f \text{ bijective} \Leftrightarrow \mathbb{M}_f \text{ inversible } (\det \mathbb{M}_f \neq 0)}$$

Proposition 8.4.3. *Même référentiel que pour le théorème. Si f bijective alors* $\boxed{\mathbb{M}_{f^{-1}} = (\mathbb{M}_f)^{-1}}$

8.5 Étude de quelque endomorphisme du plan

8.5.1 L'homothétie

Soit h une homothétie de centre O et de rapport $k \neq 0$:

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{OM} & \mapsto & \overrightarrow{OM'} = h(\overrightarrow{OM}) = k \cdot \overrightarrow{OM} \end{array}$$

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base usuelle de $\mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{M}_h = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

8.5.2 La rotation

Soit r une rotation de centre O et d'amplitude φ :

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{OM} & \mapsto & \overrightarrow{OM'} = r(\overrightarrow{OM}) \end{array}$$

où $\overrightarrow{OM'}$ est défini par $\|\overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\angle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \varphi$; On a : $\mathbb{M}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

8.5.3 La symétrie

Soit s uns symétrie d'axe t passant par O et défini par $\varphi = \angle(Ox, t)$. On a :
$\mathbb{M}_s = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$.

8.5.4 La projection

La projection p du plan sur la droite $d = (O, \vec{u})$ parallèlement à la direction $\vec{v}$ (non colinéaire à $\vec{u}$) est définie par p :

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{OM} & \mapsto & \overrightarrow{OM'} = p(\overrightarrow{OM}) \end{array}$$

avec $M' \in d$ et MM' parallèle à la direction de $\vec{v}$.

On détermine la matrice $\mathbb{M}_p$ relativement à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ à l'aide de la géométrie analytique en cherchant l'image d'un vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ quelconque du plan (intersection des droites), ou alors l'image des vecteurs de base. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs privilégies du plan, cherchons leur image :

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= \vec{u} = 1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u};\vec{v})} \\ f(\vec{v}) &= \vec{0} = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u};\vec{v})} \end{aligned}$$

Relativement à la base $(\vec{u}; \vec{v})$ de $\mathbb{R}^2$ la matrice de p s'écrit : $\mathbb{M}'_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 8.5.1 *(Cas particulier).* La projection orthogonale du plan sur la droite $(O, \vec{u})$, $\|\vec{u}\| = 1$ est définie par :

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} &\mapsto \vec{x'} = (\vec{x} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

8.5.5 L'affinité

L'affinité d'axe $a = (O, \vec{a})$ de direction $\vec{v}$ ($\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{a}$) et de rapport $k \neq 0$ est définie par :

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{OM} &\mapsto \overrightarrow{OM'} = f(\overrightarrow{OM}) \end{aligned}$$

avec $\overrightarrow{MM'}$ parallèle à la direction $\vec{v}$ et $\overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$ où $\{I\} = (MM') \cap a$.

L'axe a est une droite de points fixes : $f(\vec{a}) = \vec{a} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{a},\vec{v})}$.

D'autre part $f(\vec{v}) = k \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}_{(\vec{a},\vec{v})}$. Donc la matrice $\mathbb{M}'_f$ relativement à la base $(\vec{a}, \vec{v})$ est $\mathbb{M}'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

8.5.6 Étude géométrique de l'affinité

Soit f une affinité d'axe a, de direction $\vec{v}$ et de rapport k ($k \neq 0$ et $k \neq \pm 1$).

On a les propriétés suivantes :

1. L'image par f d'une droite est une droite (car f est linéaire) ; le rapport de section et le parallélisme sont conservés.
2. L'axe a est une droite de points invariants : $f(\vec{x}) = \vec{x}$.
3. Soient d une droite du plan et d' son image par f :
   - si $d \nparallel a$ n'est pas parallèle à s alors d et d' se coupent sur s ;
   - si $d \parallel s$ alors $d \parallel d' \parallel a$;
   - si $d \parallel \vec{v}$ alors $d' = d$ (droite *globalement* invariante) ;

4. Les distances ne sont pas conservées.

5. Les angles ne son pas conservées.

6. Le rapport des aires est constant :

$$\frac{Aire(D')}{Aire(D)} = |k| \begin{cases} \text{si } k < 0 \text{ l'orientation change} \\ \text{si } k > 0 \text{ l'orientation ne change pas} \end{cases}$$

7. f est une application de contact ; soit γ une courbe du plan et γ' son image par f. Si t est une tangente à γ en M alors t' est tangente a γ' en M'.

8.6 Changement de base

8.6.1 Transformation des composants d'un vecteur

Soient E un espace vectoriel de dimension n, et $B_e = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ une base de E.
On introduit une nouvelle base de E : $B_f = (\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_n})$. Les nouveaux vecteurs de base $\vec{f_i}$ sont définis par rapport à l'ancienne base B_e (combinaisons linéaires des $\vec{e}_i$).
Soit $\vec{x}$ un vecteur de E, $x_1, \cdots, x_n$ ses composantes dans la base B_e et $\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n$ ses composantes dans la base B_f. On a, en notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \cdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$$

ou plus simplement

$$\vec{x} = P \cdot \vec{x}'$$

Soit $P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n$.
On appelle P la *matrice de passage* de $B_e = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ à $B_f = (\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_n})$; la i-ème colonne de P est constituée des composantes de $\vec{f_i}$ par rapport à B_e : $P = \left(\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_n}\right)_{B_e}$.

Remarque 8.6.1. Les $\vec{f_i}$ sont linéairement indépendants, donc $\det P \neq 0$, donc P est inversible.

8.6.2 Transformation de la matrice d'une application linéaire

Soient E un e.v. de dim n et de base $B_e = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$, F un e.v. de dim p et de base $B_u = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ et f une application linéaire de E dans F de matrice $\mathbb{M}_f$ relativement aux bases B_e et B_u.
On introduit une nouvelle base dans E : $B_f = (\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_n})$ et une nouvelle base F : $B_v = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$.
Soient $P \in \mathbb{M}_n$ la matrice de changement de base de B_e à B_f et $Q \in \mathbb{M}_p$ la matrice de changement de base de B_u à B_v.

La nouvelle matrice $\mathbb{M}'_f$ de f relativement aux nouvelles bases B_f et B_v est donnée par :

$$\begin{tikzcd}
(E, B_e) \arrow[rr, "\mathbb{M}_f"] \arrow[d, shift left, "P^{-1}"] & & (F, B_u) \arrow[d, shift right, "Q^{-1}"'] \\
(E, B_f) \arrow[rr, "\mathbb{M}'_f"] \arrow[u, shift left, "P"] & & (F, B_v) \arrow[u, shift right, "Q"']
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\mathbb{M}'_f = Q^{-1} \cdot \mathbb{M}_f \cdot P}$$

8.6.3 Cas particulier des endomorphismes

Soient E un e.v. de dim n, $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ une base de E, f un endomorphisme de E et $\mathbb{M}_f$ la matrice de f relativement à $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$.

Remarque 8.6.2. Quand on parle d'endomorphisme de E on considère, en général, la même base dans E espace de départ et dans E espace d'arrivée.

Soient $(\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_n})$ une nouvelle base de E et $\mathbb{M}'_f$ la matrice de f par rapport à $(\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_n})$.
On a alors $\mathbb{M}'_f = P^{-1}\mathbb{M}_f P$.
On a aussi : $\det \mathbb{M}'_f = \det \mathbb{M}_f$.

Chapitre 9

Systèmes d'équations linéaires

9.1 Notion de rang

Définition 9.1.1 (1). Soient E un e.v. de dim p et $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k\}$ une famille de k vecteurs de E. On appelle rang de la famille $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k\}$ la dimension de sev de E engendré par les $\vec{a}_i$:

$$\boxed{\mathrm{rg}\,\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k\} = \dim\,[\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k]_{sev}}$$

Remarque 9.1.1. $\mathrm{rg}\,\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k\} \leq \min(k, p)$.

Définition 9.1.2 (2). Soit $A = (a_{ij})_{p\times n}$ une matrice à p lignes et n colonnes. On appelle rang de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, le rang de la famille de ses n vecteurs colonnes.

Remarque 9.1.2. $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

Définition 9.1.3 (3). Soit f une application linéaire d'un e.v. E de dim n dans un e.v. F de dim p. On appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de l'espace image de f :

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im} f)}$$

Remarque 9.1.3. $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

Conséquences de la définition :

1. $\mathrm{rg}(f) = n \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ f = \vec{0}\ (n \leq p)$;
2. $\mathrm{rg}(f) = p \Leftrightarrow \mathrm{Im}\ f = F\ (p \leq n)$.

Théorème 9.1.1. *Soit $A = (a_{ij})_{p\times n}$; le rang de la famille de ses vecteurs colonnes est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes :*

$$\boxed{rg(A) = rg(A^t)}$$

Théorème 9.1.2. *Soient E un e.v., $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k\} \subset E$ et $\vec{b} \in E$; on a :*

$$\vec{b} \in [\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k]_{sev} \Leftrightarrow rg\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k, \vec{b}\} = rg\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k\}$$

Remarque 9.1.4. Le rang d'une matrice est invariant si on ajoute à une ligne ou colonne une combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes, ou si on multiplie une ligne ou une colonne par un scalaire $k \in \mathbb{R}^*$.

9.1.1 Calcul du rang à l'aide des déterminants

Théorème 9.1.3. *Le rang d'une matrice $A = (a_{ij})_{p\times n}$ est l'ordre maximum des déterminants non nuls extraits de A.*

Remarque 9.1.5. Cette méthode n'est pas toujours la plus rapide !

Si $\mathrm{rg}(A) = r$ (r est l'ordre maximum des déterminants non nuls de A) alors :
- Tous les déterminants d'ordre $r + 1$ sont nuls ;
- Il existe un déterminant d'ordre r non nul, appelé le *déterminant principal* P ;
- Les vecteurs colonnes ou les vecteurs lignes de A correspondant à P sont *linéairement indépendants.*

Définition 9.1.4. Soient $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n)_{p\times n}$, $\mathrm{rg}(A) = r$ et $B = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n, \vec{b})_{p\times(n+1)}$. Il existe alors un déterminant principal P d'ordre r :

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

On appelle déterminant caractéristique de B (associé au déterminant principal P) tout déterminant d'ordre $r + 1$ extrait de B du type

$$C_{j-r} = \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ \hline a_{j1} & \cdots & a_{jr} & b_j \end{array}\right| \quad \text{avec } r+1 \leq j \leq p$$

Il y donc $(p - r)$ déterminants caractéristiques : $C_1, \cdots, C_{p-r}$ extraits de B.

Théorème 9.1.4. *Soient $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n)_{p\times n}$, rg($A$) $= r$ et $B = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n, \vec{b})_{p\times(n+1)}$. Alors rg($B$) $= r$ ssi tous les déterminants caractéristiques extraits de B sont nuls.*

9.2 Discussion et résolution de systèmes linéaires

On appelle *système linéaire* de p équations à n inconnues, un système du type :

$$(I)\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{array}\right.$$

Résoudre (I) c'est déterminer l'ensemble des solutions du système.

9.2.1 Interprétation matricielle du système

Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

A est la matrice des coefficients du système (matrice associée au système).

Posons encore $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_p \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Alors (I) s'écrit $AX = B$ (II).

9.2.2 Interprétation vectorielle du système

Introduction

On peut associer à la matrice $A = (a_{ij})_{p\times n}$ une application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dont la matrice associée est A.
Posons $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_p \end{pmatrix}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Alors (I) devient $f(\vec{x}) = \vec{b}$ (III).

Résoudre (III) c'est déterminer $f^{-1}\left(\{\vec{b}\}\right) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | f(\vec{x}) = \vec{b}\right\}$

Existence des solutions

Posons $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n)$ et $B = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n, \vec{b})$. (III) a des solutions ssi

$$\boxed{f^{-1}\left(\{\vec{b}\}\right) \neq \emptyset \Leftrightarrow \vec{b} \in \text{ Im } f = [\vec{a}_1, \cdots \vec{a}_n]_{sev} \Leftrightarrow \text{ rg}(A) = \text{rg}(B)}$$

donc tous les déterminants caractéristiques extraits de B sont nuls : $C_1 = \cdots = \mathbb{C}_{p-r} = 0$

De même (III) n'a pas de solutions ssi

$$\vec{b} \notin \text{ Im } f \Leftrightarrow \text{ rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Leftrightarrow \exists j \; 1 \leq j \leq p - r \text{ t.q. } C_j \neq 0.$$

Remarque 9.2.1. si $\vec{b} = \vec{0}$, on dit que le système est homogène : $f(\vec{x}) = \vec{0}$; le système admet toujours des solutions car $\vec{b} = \vec{0} \in \text{Im } f$ et $S = \text{Ker } f$.

9.2.3 Résolution du système

Reprenons le système (I) :

$$(I) \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{array} \right.$$

Soit r le rang de ce système et on suppose que le déterminant principal est

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Les inconnues $x_1, \cdots, x_r$ associées à P sont les *inconnues principales*. Les r équations associées à P sont les *équations principales*.
Si le système (I) a des solutions alors les $(p-r)$ équations non-principales sont combinaisons linéaires des équations principales et (I) devient équivalent à :

$$(I) \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{array} \right.$$

On distingue un premier cas particulier, puis deux cas plus généraux que l'on ramène au cas particulier :

1. **(Cas particulier) n = p = r** [1]
   $A(a_{ij})_{n\times n}$ est une matrice carrée et $\det A \neq 0$. Donc A est inversible et le système admet une solution unique : $X = A^{-1}B$. Les x_i (composantes de la solution) sont données par les formules de Cramer, obtenues en explicitant la matrice $A^{-1}B$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} \\
&\cdots \\
x_i &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} \\
&\cdots \\
x_n &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}}{\det A}
\end{aligned}$$

2. **r = p (n ≥ p)**
   Le système admet des solutions ; $\dim(\text{ Ker } f) = n-r$ donc les vecteurs solutions dépendent de $(n-r)$ paramètres. Pour trouver les solutions on résout les r inconnues principales en fonctions des $(n-r)$ inconnues non principales qui l'on considère comme paramètres. Le système devient

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 - (a_{1p+1}x_{p+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pp}x_p = b_p - (a_{pp+1}x_{p+1} + \cdots + a_{pn}x_n) \end{cases}$$

   dont les solutions $x_1, \cdots, x_p$ sont données par Cramer :

$$x : \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_p \\ x_{p+1} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(x_{p+1}, \cdots, x_n) \\ \cdots \\ x_p(x_{p+1}, \cdots, x_n) \\ x_{p+1} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

   Les solutions x sont en nombre infini si $n > p$ et x est unique si $n = p$ (cas précédent).

3. **r < p**
   Le système a des solutions ssi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$ $(C_1 = \cdots = C_{p-r} = 0)$.
   Le système devient alors équivalent au système composé des r équations principales, que l'on résout comme dans le 2ème cas, en prenant $x_{r+1}, \cdots, x_n$ comme paramètres.
   Les solutions sont en nombre infini si $n > r$ et est unique si $n = r$.

[1] n = nombre de inconnues (colonnes) ;
p = nombre d'équations (lignes) ;
r = ordre de P.

9.2.4 Interprétation géométrique du système pour $n = 2$ et $n = 3$

- Si $n = 2$ chaque équation du système représente une droite dans le plan, et les solutions, si elles existent, sont les points d'intersection de ces droites, point unique ou points d'une droite.
- Si $n = 3$ chaque équation représente un plan de l'espace et les solutions, si elles existent, sont les points de l'intersection de ces plans : point, droite ou plan.

9.2.5 Résolution du système par la méthode de Gauss

Il s'agit de transformer le système en un système équivalent plus simple.

Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions. On ne modifie pas les solutions d'un système en effectuant les opérations suivantes :
- *amplifier une équation par $k \in \mathbb{R}^*$;*
- *ajouter à une équation une combinaison linéaire d'une autre.*

Par la méthode de Gauss, on transforme la matrice B en une matrice B' échelonnée (triangulaire), ce qui permet de calculer les inconnues de proche en proche, ou de conclure qu'il n'y a pas de solution.
Une ligne de zéros dans B' signifie que le système équivalent admet une équation du type

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = 0, \text{ vérifié } \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Le système se réduit alors aux autres équations.

Chapitre 10

Valeurs et vecteurs propres

10.1 Définitions et propriétés

Définition 10.1.1. Soit f un endomorphisme d'un e.v. E ; $\vec{x} \in E$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) est appelé *vecteur propre* de f ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
Les valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ par lesquelles il existe $\vec{x} \in E, \vec{x} \neq \vec{0}$ tel que tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ sont appelées *valeurs propres* de f, et $\vec{x}$ est dit vecteur propre associé à λ.

Si $x \neq \vec{0}$ est un vecteur propre f, alors il est associé à une valeur propre *unique* de f.

Définition 10.1.2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre d'un endomorphisme f d'un e.v. E. On appelle sous-espace propre associé à λ l'ensemble $E_\lambda = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$.

10.1.1 Propriétés

1. E_λ est par définition l'ensemble des vecteurs propres associées à λ auxquels on ajoute le vecteur nul.
2. E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
3. $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, id_E)$.
4. Si λ_1 et λ_2 sont 2 valeurs propres distincts de f alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \vec{0}$.
5. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f. Alors $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p$ vecteurs propres respectivement associés à $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont linéairement indépendants.
6. Soit f un endomorphisme d'un e.v. E de dimension n. Si f admet n valeurs distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, alors il existe une base de E formée de n vecteurs propres.
7. Soit f un endomorphisme de E de dimension n, admettant n valeurs propres distinctes ; la matrice de f relativement à une base formée de n vecteurs propres est diagonale.

10.2 Recherche des valeurs et vecteurs propres

Théorème 10.2.1. *Soit f est un endomorphisme de E de dimension n.*
λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda\, id_E) = 0$.

Définition 10.2.1. On appelle *polynôme caractéristique* de f le polynôme en λ défini par

$$\boxed{\det(f - \lambda\, id_E)}$$

L'équation $\det(f - \lambda\, id_E) = 0$ est appelée *équation caractéristique* de f.

10.2.1 Propriétés

1. Le polynôme est indépendant de la base choisie : $\det(\mathbb{M}_f - \lambda I_n) = \det(f - \lambda\, id_E)$ quelle que soit la base de E servant à écrire $\mathbb{M}_f$.
2. Le polynôme caractéristique de f est de degré n et admet au plus n racines réelles distinctes ou confondues qui sont les valeurs propres de f.
3. Si $n = 3$ et $\mathbb{M}_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors l'équation caractéristique de f est

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + \det \mathbb{M}_f = 0$$

Remarque 10.2.1. $(a+d)$ est appelé *trace* de $\mathbb{M}_f$ (somme des produits de la diagonale) et on la note $\mathrm{tr}(\mathbb{M}_f)$.

10.2.2 Recherche de l'espace propre E_λ associé à λ

Connaissant λ valeur propre de f on cherche l'espace propre E_λ en résolvant le système homogène $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (\mathbb{M}_f - \lambda I_n)X = 0$ en sachant que $\mathrm{rg}(\mathbb{M}_f - \lambda I_n) < n$.

10.3 Diagonalisation d'un endomorphisme

Il s'agit de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que dans une base appropriée, la matrice d'un endomorphisme soit diagonalisable.

Définition 10.3.1. Soit f un endomorphisme d'un e.v. E. Une base de E formée de vecteurs propres de f est appelée *base propre* de f.

Définition 10.3.2. Soit f un endomorphisme d'un e.v. E. f est dite diagonalisable si E admet une base par rapport à laquelle la matrice de f est diagonale.

Définition 10.3.3. Une matrice A carrée d'ordre n est dite diagonalisable s'il existe une matrice carrée P d'ordre n inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Théorème 10.3.1 (Condition suffisante). *Une matrice A carrée n est diagonalisable si elle admet n valeurs propres distinctes.*

Théorème 10.3.2. *Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable ssi $\mathbb{R}^n$ admet une base propre de A.*

Théorème 10.3.3 (Condition nécessaire et suffisante). *Une matrice $A \in \mathbb{M}_n$ est diagonalisable ssi A admet n valeurs propres distinctes ou confondues $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, $k \leq n$ de multiplicité $n_1, \cdots, n_k$ $(n_1 + \cdots + n_k = n)$ telles que $\dim(E_{\lambda_i}) = n_i$ $\forall\, 1 \leq i \leq k$.*

Remarques :

1. $0 < \dim(E_{\lambda_i}) \leq n_i$;
2. Si $k = n$ alors $n_1 = \cdots = n_k = 1$ et $\dim(E_{\lambda_i}) = 1$, $\forall\ 1 \leq \leq n$

Théorème 10.3.4. *Une matrice symétrique réelle d'ordre n est toujours diagonalisable et il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres.*

Remarque 10.3.1. Soient E un e.v. de dimension n et B sa base canonique, B' une base orthonormée de E et P la matrice de passage de B à B' (les $\vec{p}_i$ vecteurs colonnes de P sont unitaires et orthogonaux 2 à 2). On a le résultat suivant : $\det(P) = 1$ et $P^{-1} = P^t$.

10.4 Interprétation géométrique d'un endomorphisme diagonalisable

10.4.1 Définition géométrique de quelques endomorphisme

Homothétie Soit h une homothétie de centre O et de rapport $k \neq 0$:

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{OP} & \mapsto & \overrightarrow{OP'} = k\,\overrightarrow{OP} \end{array}$$

Toute base de $\mathbb{R}^3$ est une base propre de h, et $\mathbb{M}_n = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = kI_3$

Projection – On considère une projection de l'espace sur la droite $(O, \vec{a})$ parallèle au plan $(O, \vec{b}, \vec{c})$.
Construction de P' image de P par p : soit α le plan passant par P et parallèle à $(O, \vec{b}, \vec{c})$, alors $\{P'\} = \alpha \cap (O, \vec{a})$. On a :
$\operatorname{Im} p = [\vec{a}]_{sev}$
$\operatorname{Ker} p = [\vec{b}, \vec{c}]_{sev}$.
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base propre de p et $\mathbb{M}'_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$.

– On considère une projection de l'espace sur le plan $(O, \vec{a}, \vec{b})$ parallèlement à $\vec{c}$.
Soit d la droite $(P, \vec{c})$ alors $\{P'\} = d \cap (O, \vec{a}, \vec{b})$. On a :
$\operatorname{Im} p = [\vec{a}, \vec{b}]_{sev}$
$\operatorname{Ker} p = [\vec{c}]_{sev}$.
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base propre de p et $\mathbb{M}'_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$.

Affinité – On considère une affinité d'axe $(O, \vec{a})$ de direction définie par le plan $(O, \vec{b}, \vec{c})$ et de rapport $k \neq 0$.
Soit α le plan passant par P et parallèle à $(O, \vec{b}, \vec{c})$ et $\{I\} = d \cap (O, \vec{a})$, alors $\overrightarrow{IP'} = k\overrightarrow{IP}$ et $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IP'} = \overrightarrow{OP} + (k-1)\overrightarrow{IP}$. On a :
$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$
$\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base propre de p et $\mathbb{M}'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}_{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$.
Si $\vec{b} \perp \vec{a}$ et $\vec{c} \perp \vec{a}$ et si $k = -1$ alors $f = s$ est une symétrie d'axe $(O, \vec{a})$.

– On considère une affinité de plan fixe $(O, \vec{a}, \vec{b})$, de direction $\vec{c}$ et de rapport $k \neq 0$.
Soit d la droite $(P, \vec{c})$ et $\{I\} = d \cap (O, \vec{a}, \vec{b})$, alors $\overrightarrow{IP'} = k\overrightarrow{IP}$ et
$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IP'} = \overrightarrow{OP} + (k-1)\overrightarrow{IP}$.
On a :
$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$
$\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base propre de p et $\mathbb{M}'_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}_{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$.

Si $\vec{c}$ est perpendiculaire au plan $(O, \vec{a}, \vec{b})$ et si $k = -1$ alors $f = s$ est une symétrie de plan fixe $(O, \vec{a}, \vec{b})$.

10.4.2 Décomposition d'un endomorphisme diagonalisable

Soit f un endomorphisme diagonalisable de l'espace.
Il existe $P \in \mathbb{M}_3$ inversible telle que $\mathbb{M}'_f = P^{-1}\mathbb{M}_f P$ soit diagonalisable.

Soit $\mathbb{M}'_f = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ relativement à la base propre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de f. $\mathbb{M}'_f$ peut être décomposé de façon non unique de la manière suivante (on suppose $\alpha \neq 0$) :

$$\mathbb{M}'_f = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma/\alpha \end{pmatrix}$$

où

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ est la matrice d'un homothétie de centre O et de rapport α,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une affinité de plan fixe $(O, \vec{a}, \vec{c})$ de direction $\vec{b}$ et de rapport β/α

et

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma/\alpha \end{pmatrix}$ est la matrice d'une affinité de plan fixe $(O, \vec{a}, \vec{b})$ de direction $\vec{c}$ et de rapport γ/α.

Remarque 10.4.1. Si $\beta = 0$ on a une projection sur $(O, \vec{a}, \vec{c})$ parallèlement à $\vec{b}$.

Remarque 10.4.2. Si $\beta = \gamma$ f est alors la composée d'une homothétie de centre O et de rapport α avec une affinité d'axe $(O, \vec{a})$ de direction définie par le plan $(O, \vec{b}, \vec{c})$ et de rapport β/α.

Deuxième partie

Géométrie analytique

Chapitre 11

Géométrie analytique sur la droite

$(O, \vec{u})$ est le repère d'origine O et de vecteur directeur $\vec{u}$ de norme $\|\vec{u}\| = 1$.
Tout point P peut être repéré par le vecteur $\overrightarrow{OP}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= x \cdot \vec{u} = \overline{OP} \cdot \vec{u} \\ \overline{OP} &= \pm \|\overrightarrow{OP}\| \end{aligned}$$

Remarque 11.0.3. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overline{BA} = -\overline{AB}$

La mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ est donnée par : $\overline{AB} = x_b - x_a$

11.1 Rapport de section

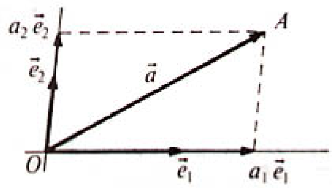
Soient A, B et C trois point. On appelle rapport section de M par rapport à A et B le nombre réel défini par $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$ et on le note $k = (AB, M)$.
Si $k > 0$ alors M est à l'extérieur du segment AB.
Si $k < 0$ alors M est à l'intérieur du segment AB.

11.2 Conjugués harmoniques

Soient A, B, M et N 4 points. M et N sont dits conjugués harmoniques à A et B si $(AB, M) = -(AB, N)$.

Chapitre 12

Géométrie analytique dans le plan



$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

12.1 Opérations vectorielles

- **Addition :**
  Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On a : $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$
- **Multiplication par un scalaire :**
  Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On a : $\vec{b} = \lambda\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$
- **Composants d'un vecteur :**
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

12.2 Rapport de section

Soient A, B et M 3 points alignés. $(AB, M) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

Remarque 12.2.1. Le rapport de section est conservé par projection sur les axes.

12.3 Norme, distance et vecteur unitaire

Soient $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. On a :

- $\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

– $\pm \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ sont des vecteurs de norme 1 appelés vecteurs unitaires.

12.4 Équations d'une droite

Soient $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ deux points distincts du plan, d la droite définie par ces deux points, $M(x, y)$ un point courant cette droite et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} \text{ ou } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v} \text{ (équation vectorielle de } d\text{)}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = a_1 + \lambda v_1 \\ a_2 + \lambda v_2 \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ (équations paramètriques)}$$

$$y - a_2 = \frac{v_2}{v_1}(x - a_1) \text{ ou } ax + by + c = 0 \text{ (équation cartésienne)}$$

La quantité $m = \dfrac{v_2}{v_1} = -\dfrac{a}{b}$ est appelée la pente de la droite d.
Les équations paramètriques et celle cartésienne devient alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$y - a_2 = m(x - a_1) \text{ ou } ax + by + c = 0$$

Deux droites de pentes m et m_1 sont perpendiculaires ssi $m \cdot m_1 = -1$.

12.5 Faisceau de droites

Définition 12.5.1. On appelle faisceau de droites de sommet S l'ensemble des droites passant par S.

Soient d_1, d_2 deux droites quelconques passant par S. Alors on peut paramétrer les équations cartésiennes des droites du faisceau par :

$$F : (a_1x + b_1y + c) + k(a_2x + b_2y + c) = 0$$

12.6 Barycentre

Définition 12.6.1. Soient n points du plan $A_1, \ldots, A_n$ et n nombres réels $m_1, \ldots, m_n$ tels que $m_1 + \cdots + m_n \neq 0$. On appelle barycentre des n points $A_1, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $m_1, \ldots, m_n$, le point G défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + \cdots + m_n}$$

Si G est le barycentre de $A_1, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $m_1, \ldots, m_n$ $(m_1 + \cdots + m_n \neq 0)$, alors $m_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + m_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

Remarque 12.6.1. si les n coefficients $m_1, \ldots, m_n$ sont égaux le barycentre est appelé isobarycentre et on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{GA_1} + \ldots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

Pour chercher le centre de gravité d'une plaque homogène de forme plus complexe on procède de la façon suivante :

1. On décompose le domaine en sous-domaines D_i dont on connaît la surface S_i et le centre de gravité G_i ;
2. On calcule le centre de gravité G de D à l'aide du théorème suivante : le centre de gravité G de D coïncide avec le barycentre des points G_i affectés des coefficients m_i proportionnels à la surface S_i.

ATTENTION : ne pas confondre le centre de gravité d'une plaque homogène avec l'isobarycentre ! ! !

Chapitre 13

Géométrie analytique dans l'espace

13.1 Généralités

Dans une base orthonormée on note :
- π_1 le plan $(0; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$: le sol ;
- π_2 le plan $(0; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$: le mur ;
- π_3 le plan $(0; \vec{e}_1; \vec{e}_3)$.

13.2 Équations d'une droite dans l'espace

Soit d une droite définie par un point A et un vecteur $\vec{v}$. La droite d est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant l'équation vectorielle :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Les équations paramètriques de d sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

On éliminant le paramètre on obtient les équations cartésiennes de d :

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

Positions particulières d'une droite d par rapport aux plans π_1, π_2 et π_3 :
- si $v_1 = 0$ la droite d est parallèle au plan π_2 (yOz) ;
- si $v_2 = 0$ la droite d est parallèle au plan π_3 (xOz) ;
- si $v_3 = 0$ la droite d est parallèle au plan π_1 (xOy).

13.3 Équations d'un plan dans l'espace

13.3.1 Plans parallèles aux axes des coordonnées

Vectoriellement un plan de l'espace est défini par un point A et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ linéairement indépendants :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Les équations paramètriques de $\alpha(A, \vec{u}, \vec{v})$ sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

On éliminant les paramètres on obtient l'équation du plan. Elle est de la forme $ax + by + cz + d$. L'équation cartésienne de α est donné par :

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

13.3.2 Plans parallèles aux axes des coordonnées

- $ax + by + d = 0$ c'est l'équation d'un plan parallèle à $\vec{e}_1$;
- $ax + cz + d = 0$ c'est l'équation d'un plan parallèle à $\vec{e}_2$;
- $by + cz + d = 0$ c'est l'équation d'un plan parallèle à $\vec{e}_3$.

13.3.3 Plans projetant d'une droite $d\,(A; \vec{v})$

$$\underbrace{\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}}_{\text{équations cartesiennes}}$$

$$\underbrace{\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}}_{1^{er}\text{plan projetant}} \quad \underbrace{\frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}}_{2^{me}\text{plan projetant}} \quad \underbrace{\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{z - a_3}{v_3}}_{3^{me}\text{plan projetant}}$$

Chapitre 14

Produit Scalaire

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls dans le plan ou l'espace. L'angle entre ces deux vecteurs est l'angle géométrique (sans orientation) φ (le plus petite) : $\varphi = \angle(\vec{a};\vec{b}), 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Le produit scalaire de ces deux vecteurs, noté $\vec{a} \cdot \vec{b}$, est le nombre défini par :

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi}$$

$\overrightarrow{A'B'}$ est la projection **vectorielle** de $\overrightarrow{AB}$ sur u ; or $\overrightarrow{A'B'} = \overline{A'B'} \cdot \vec{u}$

$\overline{A'B'}$ est la projection **algébrique** de $\overrightarrow{AB}$ sur u.

La projection algébrique de $\overrightarrow{A'B'}$ sur u est égale au produit scalaire de $\overrightarrow{A'B'}$ et $\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe u : $\overline{A'B'} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \vec{u}$

Conséquence :

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi = \|\vec{a}\| \cdot \text{ (projection algébrique de } \vec{b} \text{ sur } u)}$$

Si on est dans un repère orthonormé on peut calculer le produit vectoriel de deux vecteurs définis par leurs composantes de la façon suivante :

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

14.1 Applications aux problèmes dans le plan

14.1.1 Vecteur normal à une droite

Si $ax + by + c = 0$ est l'équation cartésienne d'une droite, alors $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

14.1.2 Forme normale ou forme d'Euler de l'équation d'une droite

$ax + by + c = 0$ est l'équation cartésienne d'une droite. L'équation normale vaut

$$fracax + by + c \pm \sqrt{a^2 + b^2}$$

avec le dénominateur de signe contraire à celui de c.

14.1.3 Distance d'un point à une droite

On obtient la distance analytique d'un point P à une droite d en remplaçant les coordonnées de P dans l'expression de la forme normale de l'équation de d.
Si P est dans le demi-plan contenant l'origine, la distance analytique de P à d est négative. Elle est positive dans le cas contraire.
La distance de P à d est donnée par la valeur absolue de la distance analytique de P à d.

14.1.4 Équations des bissectrices de deux droites sécantes

Soient $d : ax + by + c = 0$ et $g : a'x + b'y + c' = 0$ deux droites sécantes. Les bissectrices de d et g est le lieu des points équidistants de d et g. D'où l'équation cartésienne des bissectrices :

$$\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{a'x + b'y + c'}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

14.1.5 Angle entre deux droites sécantes

$$\tan\varphi = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right|, \text{ avec } m = \tan\varphi_1 \text{ et } m' = \tan\varphi_2 \text{ les deux pentes.}$$

14.2 Application aux problèmes métriques dans l'espace

14.2.1 Vecteur normal à un plan

Soit $a : ax + by + cz + d = 0$, alors $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à α.

14.2.2 Forme normale ou forme d'Euler de l'équation d'une droite

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0, \text{ avec le dénominateur de signe contraire à } d.$$

14.2.3 Distance d'un point à un plan

La distance analytique de P à α est obtenue en remplaçant les coordonnés de P dans l'expression de la forme normale de l'équation de α.

14.2.4 Angle entre deux droites

Soient deux droites quelconques et $a(A; \vec{a})$ et $b(B; \vec{b})$. L'angle φ entre ces deux droites est défini par :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

14.2.5 Angle entre une droite et un plan

Soient d une droite et α un plan de l'espace. Soit d' est la projection orthogonale de d sur a. L'angle $\varphi = \angle(d;\alpha)$ est défini par :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{d}|}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{d}\|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

14.2.6 Angle entre deux plans

Soient α, β deux plans, n_α une normale à α et n_β une normale à β. Alors $\angle(\alpha;\beta) = \angle(n_\alpha; n_\beta)$. Soit φ cet angle. φ est défini par :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\|\cdot\|\vec{n}_\beta\|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Chapitre 15

Produit vectoriel

15.1 Orientation d'un triplet de vecteurs

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs linéairement indépendants. On associe au triplet $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ une orientation : on place l'index dans la direction de $\vec{a}$, le major dans la direction de $\vec{b}$; si $\vec{c}$ est dans le demi-espace que la pouce, on dit que le triplet $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ est d'orientation positive; si $\vec{c}$ est dans l'autre demi-espace, l'orientation du triplet est négative.

Remarque 15.1.1. Soient 3 vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ indépendants. En permutant deux vecteurs le triplet change de signe.

15.2 Définition

Soient $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs de l'espace le produit vectoriel de $\vec{a}$ par $\vec{b}$ est un **vecteur** de l'espace noté $\vec{a} \times \vec{b}$ défini par :

- **sa direction** : est perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
- **son sens** : l'orientation de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ est positive;
- **sa norme** : $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi$ où $\varphi = \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. La norme $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

15.3 Propriétés

1. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires. En particulier $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;
2. $\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$: le produit vectoriel n'est pas commutatif;
3. Le produit vectoriel n'est pas associatif : en général $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$;
4. Distributivité du produit vectoriel sur l'addition :
   $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{a}$ et $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
5. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$

15.4 Calcul de produit vectoriel dans un repère orthonormé direct

$(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est un repère orthonormé et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est d'orientation positive. D'où $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$. On calcule le produit vectoriel de $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ par $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ à l'aide d'un déterminant symbolique :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

15.5 Applications du produit vectoriel

15.5.1 Intersection de deux plans

Soit D un point de l'intersection des 2 plans α et β. Alors

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \lambda \left(\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta\right)$$

est l'équation vectorielle de la droite d.

Remarque 15.5.1. Pour chercher les coordonnés de D, imposer la valeur de une des composantes.

15.5.2 Distance d'un point à une droite

Soient P un point et $d\left(D; \vec{d}\right)$ une droite de l'espace. La distance de P à d est la hauteur h du parallélogramme construit sur $\vec{d}$ et $\overrightarrow{DP}$:

$$h = \frac{\|\vec{d} \times \overrightarrow{DP}\|}{\|\vec{d}\|}$$

15.5.3 Distance entre deux droites gauches

Soient $d\left(D; \vec{d}\right)$ et $g\left(G; \vec{g}\right)$ deux droites gauches. La distance entre ces deux droites se lit sur la perpendiculaire commune à ces deux droites. Soit $\vec{n} = \vec{d} \times \vec{g}$ un vecteur de cette perpendiculaire. Alors

$$\delta = \left| \overrightarrow{DG} \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right| = \left| \overrightarrow{DG} \frac{\vec{d} \times \vec{g}}{\|\vec{d} \times \vec{g}\|} \right|$$

Chapitre 16

Produit mixte

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs de l'espace. Le produit mixte de ces trois vecteurs (pris dans cet ordre), noté $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$, est le nombre réel défini par :

$$\boxed{\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}}$$

La valeur absolue du produit mixte $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$ est égale au volume du parallélépipède construit sur $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ou 6 fois le volume du tétraèdre $OABC$.

On appelle volume analytique du parallélépipède construit sur $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ le volume de ce parallélépipède affecté du signe + ou − selon que l'orientation de $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ est positive ou négative.

16.1 Propriétés

- $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$ implique que les 3 vecteurs sont linéairement dépendants ;
- En permutant 2 vecteurs le produit mixte change de signe, d'où :
  $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$
- Propriété de linéarité : $\left[\lambda\vec{a} + \lambda\vec{a}', \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\lambda\vec{a}', \vec{b}, \vec{c}\right]$

Le produit mixte de trois vecteurs dans un repère orthonormé direct est donné par :

$$\boxed{\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)}$$

Chapitre 17

Le cercle

17.1 Équations d'un cercle

Définition 17.1.1. Un cercle est l'ensemble des points du plan situés à la distance r $(r \leq 0)$ d'un point $\Omega(x_0; y_0)$. Ω est le centre du cercle et r est le rayon.

$$M \in \gamma(\Omega, r) \Leftrightarrow \|\Omega M\| = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

C'est l'équation cartésienne de $\gamma(\Omega, r)$, et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

sont les équations paramètriques.

En développant l'équation cartésienne on a :

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

ou, plus généralement, si $a \neq 0$:

$$ax^2 + ay^2 + 2bx + 2cy + d = 0$$

ou

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - ad}{a^2}\right) = 0$$

qui est l'équation d'un cercle γ de centre $\Omega\left(-\frac{b}{a}; -\frac{c}{a}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{b^2 + c^2 - ad}{a^2}}$ $(b^2 + c^2 - ad \geq 0)$.

17.2 Tangentes au cercle

17.2.1 Tangente en un point T de γ

Soit γ un cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon r, et t la tangente à γ en T. Si M est un point courant de t

$$\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega T} = r^2$$

est l'équation vectorielle de t. On obtient l'équation cartésienne :

$$t : (x - x_0)(x_T - x_0) + (y - y_0)(y_T - y_0) - r^2 = 0$$

17.2.2 Tangentes au cercle de direction donnée

L'équation des tangentes est donné par :

$$y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

17.2.3 Tangentes à γ issues d'un point P externe au cercle

Méthode pour obtenir l'équation des tangentes à γ issues de P :
- recherche de la polaire p de P par rapport à γ ($p : xx_p + yy_p - r^2 = 0$)
- $p \cap \gamma = T, T'$
- $t = (PT), t' = (PT')$

17.3 Pôles et polaires

Définition 17.3.1. Soient γ un cercle d'équation $\gamma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$ et $P(x_P; y_P)$, avec $P \neq \Omega$. On appelle polaire de P par rapport à γ la droite p d'équation

$$p : (x - x_0)(x_P - x_0) + y - y_0)(y_P - y_0) - r^2 = 0$$

obtenue par dédoublement de l'équation de γ.
$P(x_P; y_P)$ est le pôle de P par rapport à γ
Remarque 17.3.1. Tout point P distinct du centre Ω de γ admet une polaire par rapport à γ, et toute droite ne passant pas par le centre Ω de γ admet un pôle par rapport à γ.

17.3.1 Propriétés

1. Soit Ω le centre de cercle γ, la polaire de P est perpendiculaire à ΩP.
2. Soit q une droite ne passant pas par le centre Ω de γ et P u point quelconque de q. La polaire p de P passa par le pôle Q de q.

17.4 Puissance

Soient $\gamma(\Omega, r)$ un cercle de centre Ω et de rayon r, M un point quelconque du plan et deux sécantes s et s' issues de M et coupant γ et A, B et en A', B'.
Le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est indépendant de la sécante : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{MB'}$; le produit scalaire ne dépend que de M et de γ.
Remarque 17.4.1. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = d^2 - r^2$, avec d la distance de M à Ω et r le rayon du cercle.
Définition 17.4.1. On appelle puissance de M par rapport à γ le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. On le note $\wp_{M/\gamma}$: $\wp_{M/\gamma} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
- M à l'extérieur du cercle $\gamma \Leftrightarrow \wp_{M/\gamma} > 0$
- M sur le cercle $\gamma \Leftrightarrow \wp_{M/\gamma} = 0$
- M à l'intérieur du cercle $\gamma \Leftrightarrow \wp_{M/\gamma} < 0$

17.4.1 Calcul de $\wp_{M/\gamma}$

$$\wp_{M/\gamma} = d^2 - r^2 = \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 - r^2 = (x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2 - r^2$$

On calcule la puissance de M par rapport à γ en remplaçant les coordonnées de M dans l'expression de l'équation normalisée de γ (coefficients de x^2 et $y^2 = 1$).

17.4.2 Interprétation géométrique

Soit M à l'extérieur de cercle γ, alors $\wp_{M/\gamma} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = MA \cdot MB = MT^2$, où T est le point de tangence de la tangente issue de M : $\wp_{M/\gamma} = MT^2$

17.5 Axe radical

Définition 17.5.1. Soient γ_1 et γ_2 2 cercles non concentriques ($\Omega_1 \neq \Omega_2$). On appelle axe radical des 2 cercles γ_1 et γ_2 l'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport à γ_1 et γ_2.

Soit $M(x_M, y_M)$ un point de l'axe radical de γ_1 et γ_2. Alors

$$\wp_{M/\gamma_1} = \wp_{M/\gamma_2}$$

L'axe radical de γ_1 et γ_2 est une droite dont l'équation s'obtient par différence des équations normalisées de γ_1 et γ_2.

17.5.1 Propriétés

1. L'axe radical de 2 cercles $\gamma_1(\Omega_1, r_1)$ et $\gamma_2(\Omega_2, r_2)$ est perpendiculaire à la droite des centres $(\Omega_1\Omega_2)$.
2. Si γ_1 et γ_2 sont sécantes : $\gamma_1 \cap \gamma_2 = A; B$ alors A et B appartiennent à l'axe radical de γ_1 et γ_2
3. L'ensemble des points de l'axe radical de 2 cercles extérieurs à ces 2 cercles est le lieu des points du plan d'où peut mener des tangentes de même longueur aux 2 cercles.
4. Les axes radicaux de 3 cercles pris 2 à 2 sont concourants.

17.6 Cercles orthogonaux

Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes se coupant en A. On appelle angle de Γ_1 et Γ_2 en A l'angle φ de leur tangente en A. Si $\varphi = \pi/2$, Γ_1 et Γ_2 sont dites orthogonaux en A.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

– les cercles γ_1 et γ_2 sont orthogonaux en A.
– le triangle $\Omega_1 A \Omega_2$ est rectangle en A.
– $r_1^2 + r_2^2 = d^2$, où d est la distance entre les centres Ω_1 et Ω_2.
– $\wp_{\Omega_1/\gamma_2} = r_1^2$ et $\wp_{\Omega_2/\gamma_1} = r_2^2$.

Soient $\gamma_1(\Omega_1, r_1)$ et $\gamma_2(\Omega_2, r_2)$ 2 cercles donnés. Le lieu du centre des cercles $\gamma(\Omega, r)$ orthogonaux à γ_1 et γ_2 est l'ensemble des points de l'axe radical γ_1 et γ_2 (extérieurs à γ_1 et γ_2).

Chapitre 18

Courbes paramétrées

On appelle arc paramètré la donnée d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction f de I dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} f : I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

18.1 Fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in I$ une fonction vectorielle définie dans un voisinage de $t_0 \in I$.

Proposition 18.1.1 (Notion de limite).

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \ \textit{ssi} \ \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \ \textit{et} \ \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0$$

Proposition 18.1.2 (Notion de continuité). *$\vec{r}(t)$ est continue en t_0 ssi $x(t)$ et $y(t)$ sont continues en t_0.*

Proposition 18.1.3 (Dérivée). *$\vec{r}(t)$ est dérivable et t_0 ssi $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables et* $\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

18.2 Quelques éléments d'étude des courbes paramètriques

1. **Les symétries**
   (a) si $x(t)$ est *pair* et $y(t)$ est *impair* alors Γ admet Ox comme axe de symétrie.
   (b) si $x(t)$ est *impair* et $y(t)$ est *pair* alors Γ admet Oy comme axe de symétrie.
   (c) si $x(t)$ et $y(t)$ sont *impaires* alors Γ admet l'origine O comme centre de symétrie.
2. **Points doubles, points multiples**
   On dit que la trajectoire de $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ admet un point multiple d'ordre k s'il existe exactement k valeurs distincts de $t \in I$: $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ t.q. $M = M(t_1) = M(t_2) = \cdots = M(t_k)$.
   En pratique en recherche l'existence de points doubles : $t_1 \neq t_2, \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$; le nombre de solutions obtenues nous donne la multiplicité k du point multiple.

3. **Points stationnaires**
   $M(t_0)$ est un point stationnaire ssi $\vec{r}'(t_0) = \vec{0}$.
4. **Branches infinies**
   On dit que la trajectoire de $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ admet une branche infinie au voisinage de t_0 (t_0 fini ou infini) ssi
   $$\lim_{t \to t_0} \|\overrightarrow{OM}(t)\| = \infty$$
   Trois cas possibles (quand $t \to t_0$) :
   (a) Si $x(t) \to a$ et $y(t) \to \infty$ Γ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$;
   (b) Si $x(t) \to \infty$ et $y(t) \to b$ Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$;
   (c) Si $x(t) \to \infty$ et $y(t) \to \infty$ Γ admet éventuellement une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$ avec
   $$m = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{et} \quad h = \lim_{t \to t_0} (y(t) - mx(t))$$
   (voir aussi le paragraphe *Asymptotes* dans la section 26.8.5, page 105).

18.3 Étude d'une courbe paramètrée

1. Domaine de définition ;
2. Parité, périodicité (recherche de symétries évidentes) ;
3. Limites aux points frontières (recherche d'une éventuelle asymptote) ;
4. Dérivée ;
   – Zéros et signe de $y'(t)$ et $x'(t)$;
   – Zéros commun à $y'(t)$ et $x'(t)$ (recherche des points stationnaires) ;
5. Récapitulation sous forme de tableau de variation ;
6. Graphe ;
7. Points doubles et symétries non évidentes (d'après le graphe).

Chapitre 19

Étude élémentaire des coniques

19.1 L'ellipse

19.1.1 Définition

L'*ellipse* est un lieu des point du plan dont la somme des distances à deux points F et F' est une constante positive notée $2a$ ($a > 0$).
Les deux points F et F' sont les *foyers* de l'ellipse ; le centre Ω est le point milieu de FF'.

Soient $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé du plan, $F'(-c; 0)$ et $F(c; 0)$ ($c > 0$) les foyers de l'ellipse et $M(x; y)$ un point de l'ellipse. L'équation cartésienne de ε est donné par :

$$\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{avec } b^2 = a^2 - c^2$$

De même on à l'équation paramètrique :

$$\varepsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

L'ellipse coupe l'axe des x en $A(a; 0)$ et $A'(-a; 0)$ et coupe l'axe des y en $B(0; b)$ et $B'(0; -b)$.
AA' est le *grand axe* de l'ellipse de longueur $2a$;
BB' est le *petit axe* de l'ellipse de longueur $2b$;
La distance entre les foyers FF' vaut $2c$.

19.1.2 Paramètre et excentricité

On appelle *paramètre* de l'ellipse la longueur de la corde focale perpendiculaire au grand axe (droite passante par un foyer et perpendiculaire au grand axe). On le note $2p$:

$$2p = \frac{2b^2}{a}$$

L'*excentricité* de l'ellipse est le rapport de la distance entre les foyers et la longueur du grand axe. On la note e :

$$e = \frac{c}{a}$$

Ce rapport mesure "l'aplatissement" de l'ellipse (si $e = 0$ l'ellipse est un cercle).

Le paramètre et l'excentricité définissent l'ellipse :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

et

$$b^2 = \frac{p^2}{1-e^2}$$

19.1.3 Équations sous forme élémentaire

$$\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\varepsilon_{transl} : \frac{(x-x_\Omega)^2}{a^2} + \frac{(y-y_\Omega)^2}{b^2} - 1 = 0$$

Si on applique une rotation de $\pm\pi/2$ on obtient :

$$\varepsilon_1 : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$$

$$\varepsilon_{1\,transl} : \frac{(x-x_\Omega)^2}{b^2} + \frac{(y-y_\Omega)^2}{a^2} - 1 = 0$$

19.1.4 Tangentes et polaires

Tangente à un point de l'ellipse

Soit $\varepsilon : b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ et $T(x_0; y_0) \in \varepsilon$. L'équation de la tangente t à ε en T s'écrit

$$t : b^2xx_0 + a^2yy_0 - a^2b^2 = 0$$

Remarque 19.1.1. La règle de dédoublement établie lors de l'étude du cercle reste valable pour l'ellipse.

Tangentes de direction donnée

Soit m la pente de la tangente. On a :

$$t : y - y_\Omega = m(x - x_\Omega) \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$

si l'ellipse est de grand-axe horizontal et

$$t : y - y_\Omega = m(x - x_\Omega) \pm \sqrt{a^2 + b^2m^2}$$

Tangentes issues d'un point P extérieur

Soit Soit $\varepsilon : b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ et $P(x_P; y_P)$. Soient $T_1(x_1; y_1)$ et $T_2(x_2; y_2)$ les points de contact des tangentes t_1 et t_2 à ε issues de P. Pour trouver les équations des tangentes on procède de la façon suivante :

1. On cherche la polaire p de P par rapport à ε par la règle de dédoublement ;
2. $T_1; T_2 = p \cap \varepsilon$;
3. $t_1 = (PT_1)$ et $t_2 = (PT_2)$.

Pôles et polaires

Si $P \neq \Omega$ la polaire p de P par rapport à ε est la droite p dont l'équation s'obtient par la règle de dédoublement.

Les propriétés des pôles et polaire de l'ellipse sont analogues à celles des pôles et polaire du cercle.

Directrices

Définition 19.1.1. On appelle *directrices* d'une ellipse les polaires des foyers.

Remarque 19.1.2. La distance analytique entre Ω et et la droite d est donné par $x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$.

Propriété géométrique : Soit M un point de l'ellipse; le rapport des distance de M à F et de M à d est constant et est égal à l'excentricité e :

$$\frac{\delta(M,F)}{\delta(M,d)} = e$$

Diamètres conjugués

Définition 19.1.2. Un diamètre d'une ellipse est une corde passant par le centre.

Définition 19.1.3. Deux diamètres d'une ellipse sont dites *conjugués* ssi les tangentes aux extrémités de l'un sont parallèles à l'autre.

Propriété analytique : Soient $\varepsilon(a,b)$ une ellipse, d_1 de pente m_1 et d_2 de pente m_2 deux diamètres de ε. Les deux diamètres sont conjuguées ssi

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$$

Propriété géométrique : Soit MN un diamètre de l'ellipse ε; le diamètre conjugué de MN est le lieu des points milieux des cordes parallèles à MN.

19.2 L'hyperbole

Définition 19.2.1. L'*hyperbole* est le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes F et F' appelés *foyers* est une constante positive notée $2a$ $(a > 0)$.
Le point milieu de FF' est le centre Ω de l'hyperbole.

Soit $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé du plan. L'équation cartésienne de l'hyperbole de foyers $F(c;0)$ et $F'(-c;0)$ $(c > 0)$ est donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \;\text{ avec } b^2 = c^2 - a^2$$

L'hyperbole coupe l'axe Ox en $A(a;0)$ et $A'(-a;0)$ (sommets de l'hyperbole) et ne coupe pas l'axe $0y$. L'axe Ox est appelé *axe réel* et l'axe Oy est appelé *axe imaginaire*.

Les deux asymptotes d'équation $y = \pm\frac{b}{a}x$ se coupent au centre Ω de l'hyperbole.

19.2.1 Paramètre et excentricité

Comme pour l'ellipse, on définit le paramètre et l'excentricité de l'hyperbole.

– Le *paramètre*, noté $2p$, est la longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe réel :

$$2p = \frac{2b^2}{a}$$

– L'excentricité e vaut :

$$e = \frac{c}{a} > 1 \ (c > a)$$

19.2.2 Équations sous forme élémentaire

Équation normale :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Translation :

$$\frac{(x - x_\Omega)^2}{a^2} - \frac{(y - y_\Omega)^2}{b^2} - 1 = 0$$

Rotation (axe réel vertical) :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - 1 = 0$$

Rotation et translation :

$$\frac{(y - y_\Omega)^2}{a^2} - \frac{(x - x_\Omega)^2}{b^2} - 1 = 0$$

19.2.3 Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

Soit $\vec{u}_1$ le vecteur directeur unitaire à l'asymptote $y = -\frac{b}{a}x$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} a/c \\ -b/c \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{u}_2$ le vecteur directeur unitaire à l'asymptote $y = \frac{b}{a}x$: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} a/c \\ b/c \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est $P = \begin{pmatrix} a/c & a/c \\ -b/c & b/c \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

L'équation de l'hyperbole devient $4x'y' = c^2$.

Remarque 19.2.1. Une droite s coupe une hyperbole en P et Q et ses asymptotes en A et B. Alors $AP = PQ$.

On peut se servir de cette résultat pour construire par points et tangentes une hyperbole définie par ses asymptotes et un point.

19.2.4 Tangentes et polaires

Soit $H : b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

1. Tangente à H en $T(x_T; y_T)$ (règle de dédoublement) : $t : b^2x_Tx - a^2y_Ty - a^2b^2$;
2. Tangentes à H de pente m $t : y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$;
3. Polaire de $P(x_P; y_P)$ par rapport à H : $p : b^2x_Px - a^2y_Py - a^2b^2$;
4. Tangentes à H issues de P :
   – polaire de P par rapport à H ;
   – $p \cap H = \{T_1; T_2\}$
   – $t_1 : (PT_1)$ et $t_2 : (PT_2)$.

19.2.5 Directrices

Ce sont les polaires des foyers obtenues par dédoublement. Soit $H : b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. On a $d : x = \pm\frac{a^2}{c}$.

Propriété géométrique

Soit M un point de l'hyperbole ; le rapport des distances de M au foyer F et de M à la directrice d est constant et vaut e.

19.3 La parabole

La parabole est le lieu des points du plan équidistant d'un point F (foyer) et d'une droite d (directrice) donnée. L'équation cartésienne de la parabole est

$$y^2 = 2px \ (p > 0)$$

L'origine O est l'intersection de la parabole et son axe de symétrie ; on l'appelle *sommet* de la parabole et on le note S.

19.3.1 Tangentes et polaires

Les notions de tangentes et polaires de la parabole sont analogues à celles de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Remarque 19.3.1. Il n'existe qu'une seule tangente à la parabole de pente m donnée.

19.4 Définition générale d'une conique

Une conique est le lieu des points du plan dont le rapport des distances à un point F (foyer) et d (directrice) de la conique est constant.

La constante e est l'excentricité de la conique :

$$M \in C \Leftrightarrow \frac{\delta(M,F)}{\delta(M,d)} = e$$

L'équation de la conique de direction $d = Oy$, de foyer $(F;0)$ et d'excentricité $e > 0$ est

$$(1-e^2)x^2 + y^2 - 2fx1f^2 = 0$$

- $0 < e < 1$, donc $1 - e^2 > 0$

  La conique est une ellipse de centre $\Omega\left(\dfrac{f}{1-e^2};0\right)$ avec $a = \dfrac{ef}{1-e^2}$ et $b = \dfrac{ef}{\sqrt{1-e^2}}$:

$$\frac{\left(x - \frac{f}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{ef}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ef}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} - 1 = 0$$

- $e = 1$, donc $1 - e^2 = 0$

  La conique est une parabole de sommet $S\left(\dfrac{f}{2};0\right)$ avec $2p = 2f$.

– $e > 1$, donc $e^2 - 1 < 0$
La conique est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\dfrac{f}{e^2-1};0\right)$ avec $a = \dfrac{ef}{e^2-1}$ et $b = \dfrac{ef}{\sqrt{e^2-1}}$:

$$\frac{\left(x+\frac{f}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{ef}{e^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{ef}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2} - 1 = 0$$

19.5 Étude élémentaire des coniques - Résumé

19.5.1 Étude élémentaire de l'ellipse

Grand axe horizontal

Équation de l'ellipse : $\dfrac{(x-x_\Omega)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_\Omega)^2}{b^2} - 1 = 0,\ a > b$
Support de grand axe : $y = y_\Omega$, du petit axe : $x = x_\Omega$
Foyers : $F(x_\Omega + c; y_\Omega$ et $F'(x_\Omega - c; y_\Omega$
Paramètre : $2p = \frac{2b^2}{a}$, excentricité : $e = \frac{c}{a} < 1$
Tangentes de pente m : $y - y_\Omega = m(x - x_\Omega) \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$
Directrices : $x = x_\Omega \pm \frac{a^2}{c}$
Diamètres conjuguées de pentes m_1 et m_2 : $m_1m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$

Grand axe vertical

Équation de l'ellipse : $\dfrac{(y-y_\Omega)^2}{a^2} + \dfrac{(x-x_\Omega)^2}{b^2} - 1 = 0,\ a > b$
Support de grand axe : $x = x_\Omega$, du petit axe : $y = y_\Omega$
Foyers : $F(x_\Omega; y_\Omega + c$ et $F'(x_\Omega; y_\Omega - c$
Paramètre : $2p = \frac{2b^2}{a}$, excentricité : $e = \frac{c}{a} < 1$
Tangentes de pente m : $y - y_\Omega = m(x - x_\Omega) \pm \sqrt{a^2 + b^2m^2}$
Directrices : $y = y_\Omega \pm \frac{a^2}{c}$
Diamètres conjuguées de pentes m_1 et m_2 : $m_1m_2 = -\frac{a^2}{b^2}$

19.5.2 Étude élémentaire de l'hyperbole

Grand réel horizontal

Équation de l'hyperbole : $\dfrac{(x-x_\Omega)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_\Omega)^2}{b^2} - 1 = 0,\ a > b$
Axe réel : $y = y_\Omega$, axe imaginaire : $x = x_\Omega$
Foyers : $F(x_\Omega + c; y_\Omega$ et $F'(x_\Omega - c; y_\Omega$
Asymptotes : $y - y_\Omega = \pm\frac{b}{a}(x - x_\Omega)$
Paramètre : $2p = \frac{2b^2}{a}$, excentricité : $e = \frac{c}{a} > 1$
Tangentes de pente m : $y - y_\Omega = m(x - x_\Omega) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$
Directrices : $x = x_\Omega \pm \frac{a^2}{c}$

Grand réel vertical

Équation de l'hyperbole : $\dfrac{(y-y_\Omega)^2}{a^2} - \dfrac{(x-x_\Omega)^2}{b^2} - 1 = 0,\ a > b$
Axe réel : $x = x_\Omega$, axe imaginaire : $y = y_\Omega$
Foyers : $F(x_\Omega; y_\Omega + c$ et $F'(x_\Omega; y_\Omega - c$
Asymptotes : $y - y_\Omega = \pm\frac{a}{b}(x - x_\Omega)$
Paramètre : $2p = \frac{2b^2}{a}$, excentricité : $e = \frac{c}{a} > 1$
Tangentes de pente m : $y - y_\Omega = m(x - x_\Omega) \pm \sqrt{a^2 - b^2m^2}$
Directrices : $y = y_\Omega \pm \frac{a^2}{c}$

19.5.3 Étude élémentaire de la parabole

L'équation de la parabole est en fonction des coordonnées de son sommet S et de la valeur du demi-paramètre $p = \delta(F, d)$

Axe horizontal, concavité vers la droite

Équation : $(y - y_s)^2 = 2p(x - x_s)$
Foyer : $F(x_s + \frac{p}{2}; y_s)$
Directrice : $x = x_s - \frac{p}{2}$
Axe : $y = y_s$

Axe horizontal, concavité vers la gauche

Équation : $(y - y_s)^2 = -2p(x - x_s)$
Foyer : $F(x_s - \frac{p}{2}; y_s)$
Directrice : $x = x_s + \frac{p}{2}$
Axe : $y = y_s$

Axe vertical, concavité vers le haut

Équation : $(x - x_s)^2 = 2p(y - y_s)$
Foyer : $F(x_s; y_s + \frac{p}{2})$
Directrice : $y = y_s - \frac{p}{2}$
Axe : $x = x_s$

Axe vertical, concavité vers le bas

Équation : $(x - x_s)^2 = -2p(y - y_s)$
Foyer : $F(x_s; y_s - \frac{p}{2})$
Directrice : $y = y_s + \frac{p}{2}$
Axe : $x = x_s$

Chapitre 20

Étude générale des coniques

20.1 Changement de repère

20.1.1 Translation

On considère une ellipse centrée en $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$, le grand axe est horizontal. Le changement de repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ correspond à une translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$.

L'équation de l'ellipse $b^2x'^2 + a^2y'^2 - a^2b^2 = 0$ dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ s'écrit

$$b^2(x - x_\Omega)^2 + a^2(y - y_\Omega)^2 - a^2b^2 = 0$$

dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Remarque 20.1.1. La translation de l'ellipse transforme son équation en faisant apparaître des termes en x et y et en modifiant le terme constant.

20.1.2 Rotation

On considère une ellipse centrée à l'origine et le grand axe fait un angle θ avec l'axe Ox. Le changement de repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ correspond à une rotation d'angle θ. L'équation de l'ellipse $b^2x'^2 + a^2y'^2 - a^2b^2 = 0$ dans le repère $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ s'écrit

$$b^2(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + a^2(-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 - a^2b^2 = 0$$

dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Remarque 20.1.2. La rotation de centre O et d'angle θ de l'ellipse transforme son équation en faisant apparaître un terme en xy et en modifiant les coefficients de x^2 et y^2.

20.1.3 Cas général

On considère une ellipse centrée en $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et le grand axe fait un angle θ avec l'axe Ox. Le changement de repère de $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ correspond à la composée d'une rotation de centre O et d'angle θ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$ ou vice-versa.

L'équation de l'ellipse $b^2x'^2 + a^2y'^2 - a^2b^2 = 0$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ s'écrit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Remarque 20.1.3. Le terme en xy est la conséquence de la rotation, et les termes en x et y sont les conséquences de la translation.

Cette équation peut s'écrire sous la forme matricielle en posant

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

L'équation s'écrit alors $X^t A X = 0$:

$$(x\ y\ 1) \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

20.2 Notions sur les points à l'infini

20.2.1 Introduction

Soit d une droite d'équation $y = ax + b$. On cherche à caractériser le(s) point(s) à l'infini de d à l'aide de la pente m d'une sécante s d'équation $y = mx$. $\{M\} = s \cap d : a - m + \frac{b}{x} = 0$.

$$\lim_{x \to \infty} a - m + \frac{b}{x} = 0 \Leftrightarrow m = a$$

La pente $m = a$ caractérise le point à l'infini de la droite d. On dit que d possède un point à l'infini dans la direction définie par $m = a$.

20.2.2 Points à l'infini et coniques

Le nombre de points à l'infini d'une conique caractérise le genre de la conique :

Pas de points à l'infini : genre ellipse ;

Un point à l'infini : genre parabole ;

Deux points à l'infini : genre hyperbole.

20.2.3 Conique en position particulière

Soit $\mathcal{C} : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ et $s : y = mx$.

$\{M\} = \mathcal{C} \cap s : A + 2Bm + Cm^2 + \dfrac{2D + 2Ex}{x} + \dfrac{F}{x^2} = 0$.

Or $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left[A + 2Bm + Cm^2 + \frac{2D + 2Ex}{x} + \frac{F}{x^2} \right] = 0 \Leftrightarrow A + 2Bm + Cm^2 = 0$.

Le nombre de points à l'infini de $\mathcal{C}$ est égale au nombre de racines de ce trinôme de deuxième degré en m.

- $B^2 - AC < 0$: pas de point à l'infini $\Rightarrow$ la conique est de genre ellipse ;
- $B^2 - AC = 0$: un point à l'infini $\Rightarrow$ la conique est de genre parabole ;
- $B^2 - AC > 0$: deux points à l'infini $\Rightarrow$ la conique est de genre hyperbole.

Soit $B = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients des termes du deuxième degré de $\mathcal{C}$. On pose $\delta = \det B = AC - B^2$. On a alors

- $\delta > 0$: la conique est de genre ellipse ;
- $\delta = 0$: la conique est de genre parabole ;
- $\delta < 0$: la conique est de genre hyperbole.

20.3 Réduction de l'équation d'une conique

On considère le cas $\delta \neq 0$ (coniques à centre).
Considérons la conique $\mathcal{C} : Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ par rapport au repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

20.3.1 Translation

L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ no possède plus de terme de premier degré en x et y.
On a :

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2(Ax_\Omega+By_\Omega+D)x'+2(Bx_\Omega+Cy_\Omega+E)y'+(Ax_\Omega^2+2Bx_\Omega y_\Omega+Cy_\Omega^2+2Dx_\Omega+2Ey_\Omega+F)=0$$

Les coordonnés du centre Ω sont donné par le système

$$\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du centre Ω sont données par Cramer : $x_\Omega = \dfrac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\delta}$ et $y_\Omega = -\dfrac{\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\delta}$

Soit k le terme constant de l'équation de $\mathcal{C}$. On a $k = \dfrac{1}{\delta}\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$.

En posant $\Delta = \det A$, on a $k = \dfrac{\Delta}{\delta}$.

L'équation de la conique $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ s'écrit

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$$

20.3.2 Rotation

En faisant subir au repère $(\Omega,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ une rotation de centre Ω, d'angle θ de sorte que les axes du nouveau repère $(\Omega,\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ coïncident avec les axes de symétrie de la conique $\mathcal{C}$, l'équation s'écrit alors

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$$

avec $x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta$ et $y' = x''\sin\theta + y''\cos\theta$.

On imposant le coefficient de $x''y''$ soit nul, on obtient la valeur de θ et la direction des axes de la conique $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

- si $A = C$, $\cos 2\theta = 0$, d'où $\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- si $A \neq C$, $\tan 2\theta = \dfrac{2B}{A-C}$, d'où $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$ et $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$. On en déduit $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Les coefficients de λ_1 et λ_2 sont donnés par

- $\lambda_1 = A + B\tan\theta$;
- $\lambda_2 = C - B\tan\theta$.

Remarque 20.3.1 *(Formules de Viète).* On a
- $\lambda_1 + \lambda_2 = A + C$;
- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = AC - B^2 = \delta$

20.4 Cas de dégénérescences

L'équation réduite de la conique dans le repère $(\Omega; \vec{u}_1; \vec{u}_2)$ s'écrit

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + k = 0 \text{ avec } \frac{\Delta}{\delta}$$

1. Si $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = \operatorname{sgn}(k)$ alors aucun couple $(x''; y'')$ ne vérifie cette équation. On parle de *conique imaginaire.*
2. si $\dfrac{\Delta}{\delta} = 0$, donc $\Delta = 0$ alors :
   (a) si $\delta > 0$ (conique genre ellipse), $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$. Le seul couple $(x''; y'')$ est $(0; 0)$; la conique dégénère en un point (centre Ω).
   (b) si $\delta < 0$ (conique genre hyperbole), $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$. Alors on a

   $$|\lambda_1| x''^2 - |\lambda_2| y''^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{|\lambda_1|} x'' + \sqrt{|\lambda_2| y''})(\sqrt{|\lambda_1|} x'' + \sqrt{|\lambda_2| y''}) = 0$$

   La conique dégénère en un paire de droites concourantes passant par le cercle Ω.

Troisième partie

Analyse I

Chapitre 21

Calcul algébrique

21.1 Identités algébriques

$$\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\
a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)
\end{aligned}$$

21.2 Exposants et racines

$$sgn(a^n) = \begin{cases} sgn(a) & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (a^n)^n = a^{nm}$$

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = a^{\frac{n}{p}}, \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

Chapitre 22

Valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

22.1 Résolution de l'équation $|x| = a$

$$|x| = a \Leftrightarrow |x| = \begin{cases} \text{si } a < 0 & \Rightarrow \mathrm{S} = \emptyset \\ \text{si } a = 0 & \Rightarrow \mathrm{S} = \{0\} \\ \text{si } a > 0 & \Rightarrow \mathrm{S} = \{-a; a\} \end{cases}$$

22.2 Résolution de l'inéquation $|x| \leq a$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow |x| = \begin{cases} x \leq a \\ \text{et} \\ x \geq a \end{cases}$$

22.3 Résolution de l'inéquation $|x| \geq a$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow |x| = \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq a \end{cases}$$

Chapitre 23

Fonction signe

Sur $\mathbb{R}^*$ on définit la fonction signe, notée sgn, par :

$$sgn(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

23.1 Propriétés

$$\forall\ x \neq 0,\ |x| = x \cdot sgn(x) \text{ et } x = |x| \cdot sgn(x)$$

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R}^*,\ sgn(ab) = sgn(a) \cdot sgn(b)$$

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R}^*,\ sgn\left(\frac{a}{b}\right) = sgn(a) \cdot sgn(b)$$

$$|-x| = |x| \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$|xy| = |x| \cdot |y|\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$$

$$a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow |a| \leq |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Chapitre 24

Trinôme de deuxième degré

24.1 Zéros du trinôme de deuxième degré

Soit $P = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Si
- $\Delta < 0$ P n'admet pas de zéro réel ;
- $\Delta = 0$ P s'annule en $-b/2a$;
- $\Delta > 0$ P admet deux solutions distinctes :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Soit $P = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ \Delta = b^2 - 4ac > 0$, et $x_{1,2}$ les deux racines distinctes de P. Alors $P = a(x - x_1)(x - x_2)$.

24.2 Formules de Viète

Soit $P = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ \Delta = b^2 - 4ac > 0$, et $x_{1,2}$ les deux racines distinctes de P.
Alors :
- la somme des deux racines $x_{1,2}$ vaut $-b/a$;
- le produit des deux racines $x_{1,2}$ vaut $-c/a$;

Chapitre 25

Suites de nombres réels

Une suite de nombres réels est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} a : \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a(n) = a_n \end{array}$$

a_n est le terme générale de la suite et n est le rang de a_n. La suite $a_1, a_2, \ldots$ se note $\{a_n\}$.

- Une suite est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ a_n \leq M$.
- Une suite est *minorée* s'il existe $N \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ a_n \geq N$.
- Une suite est *bornée* si elle admet un majorant ET un minorant.
- Une suite est *croissante* si $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ a_n \leq a_{n+1}$. Elle est strictement croissante si $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ a_n < a_{n+1}$.
- Une suite est *décroissante* si $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ a_n \geq a_{n+1}$. Elle est strictement décroissante si $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ a_n > a_{n+1}$.
- Une suite est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

25.1 Opérations sur les suites

1. $|\{a_n\}| = \{|a_n|\} : \ |a_1|, |a_2|, \ldots;$
2. $\{a_n\} \pm \{b_n\} = \{a_n \pm b_n\}$;
3. $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$;
4. $\dfrac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$, $b_n \neq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$;
5. $\lambda \{a_n\} = \{\lambda\} \cdot \{a_n\}$, donc on se ramène au nř 3.

25.2 Limite d'une suite

Une suite $\{a_n\}$ converge vers une limite $a \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N(\varepsilon)$ tel que $\forall\ n \geq N(\varepsilon), |a_n - a| < \varepsilon$. On écrit alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ ou } a_n \to a$$

Une suite $\{a_n\}$ qui converge vers une limite $a \in \mathbb{R}$ (Attention : $\infty \notin \mathbb{R}$) est dite convergente, sinon elle est divergente.

25.2.1 Quelques théorèmes importants

Théorème 25.2.1. *Une suite convergente admet une limite unique.*

Théorème 25.2.2. *Toute suite convergente est bornée. Attention : la réciproque est fausse !*

Théorème 25.2.3. *Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites convergentes, $a_n \longrightarrow a$ et $b_n \longrightarrow b$. On a :*

1. $|a_n| \rightarrow |a|$;
   Attention : $|\{a_n\}|$ converge n'implique pas que $\{a_n\}$ converge ;
2. $a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$;
3. $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$;
4. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *si* $b_n \neq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$ *et* $b \neq 0$.

Théorème 25.2.4. *Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites convergentes vers a et b. Alors s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $a_n \leq b_n\ \forall\ n > N$ on a $a \leq b$.*

Théorème 25.2.5 (2 gendarmes). *Critère de comparaison ou théorème des 2 gendarmes. Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ et $\{S_n\}$ 3 suites telles que $\exists N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall\ n > N$ on a $a_n \leq S_n \leq b_n$. Alors si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} S_n = l$$

Corollaire 25.2.6. *Corollaire du théorème des 2 gendarmes. Soit $\{S_n\}$ une suite t.q. $|\{S_n\}|$, alors $S_n \rightarrow 0$.*

Théorème 25.2.7. *Une suite monotone et bornée est convergente.*

Corollaire 25.2.8 (1). *Toute suite croissante et majorée est convergente ;*

Corollaire 25.2.9 (2). *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

25.3 Limite infinie

Une suite converge $\{a_n\}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini $\forall\ A > 0, \exists\ N(A) \in \mathbb{N}^*$ t.q. $a_n > A\ \forall\ n \leq N(A)$.

25.4 Suites récurrentes

Une suite $\{a_n\}$ est dite récurrente si elle est définie par son(ses) premier(s) terme(s) et si a_{n+1} est défini à l'aide des termes précédents.

Deux méthodes pour étudier ces suites et en calculer leur limite (éventuelle) :

1. On cherche le terme général de la suite (ce n'est pas toujours possible !) : on calcule les premiers termes de la suite, on «devine» le terme général, et on démontre ce résultat par récurrence.
2. Soit $\{a_n\}$ définie par $a_{n+1} = \varphi(a_n)$ et a_1 donné. On démontre d'abord que la limite existe (on démontre qu'elle est positive/negative, croissante/décroissante, majorée/minorée).

   $$\text{Or } a_{n+1} = \varphi(a_n) \text{ et } \lim_{n\to\infty} a_{a+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(a_n),\ \text{d'où } a = \varphi(a_n).$$

   On détermine la limite a en résolvant l'équation $a = \varphi(a_n)$.

   ATTENTION : L'existence de la limite est essentielle ! ! !

25.5 Limite d'une fonction

On dit que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall\, x \in M(x \in \mathbb{D}_{def}), |f(x) - a| < \varepsilon$.

Existence de la limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe ssi } \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ existent et sont égales.}$$

25.6 Infiniment petits équivalents

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 telles que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

On dit que f et g sont infiniment petits équivalents ssi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \text{ ou } \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$$

On écrit alors $f \sim g$ (dans un voisinage de x_0).

Dans un voisinage de x_0 on a :
- $\sin x \sim x$;
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$;
- $\tan x \sim x$.

25.7 Continuité

Une fonction f est continue en x_0 ssi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cette définition comporte trois exigences :
1. $f(x_0)$ existe ($x_0 \in \mathbb{D}_{def}$) ;
2. la limite existe (limite à droite = limite à gauche) ;
3. cette limite vaut $f(x_0)$.

Soient f et g deux fonctions continues en x_0, alors $|f|$, $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ et $f \circ g$ sont continues en x_0.

Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de x_0. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

existe, alors on peut définir une fonction $\widetilde{f}$ continue en x_0 :

$$\widetilde{f} : \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ a \text{ si } x = x_0 \end{cases}$$

Chapitre 26

Calcul différentiel

26.1 Généralités et définitions

Soit f une fonction définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{D}_{def}$, et posons $y = f(x)$. Le quotient des différences, appelé rapport de Newton, vaut :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Or $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$ est la pente de la sécante passant par $(x_0; f(x_0))$ et $(x_0 + \Delta x; f(x_0 \Delta x))$.
On faisant tendre Δx vers 0 aussi Δy tend vers 0. D'où la définition suivante :

Définition 26.1.1. Soit f une fonction définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{D}_{def}$. On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

existe. Cette limite est notée $f'(x_0)$ et on l'appelle le nombre dérivée de f en x_0 .

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0 (attention : la réciproque est fausse !).

26.2 Règles de dérivation

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'\left[f(x)\right] \cdot f'(x)$$

26.3 Dérivées des fonctions usuelles

$$c' = 0$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$(g \circ f)'(x) = g'\left[f(x)\right] \cdot f'(x)$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$
$$\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$
$$\sqrt[n]{u} = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$|u|' = sgn(u) \cdot u'$$

$$\frac{1}{u^m} = \frac{m \cdot u'}{u^{m+1}}$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$
$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$(\ln |u|)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$
$$(\log_a |u|)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$
$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'\left(1 + \tan^2 u\right)$$
$$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'\left(1 + \cot^2 u\right)$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\sinh u)' = \cosh u \cdot u'$$
$$(\cosh u)' = \sinh x \cdot u'$$
$$(\tanh u)' = \frac{u'}{\cosh^2 u} = u'\left(1 - \tanh^2 u\right)$$
$$(\coth u)' = -\frac{u'}{\sinh^2 u} = u'\left(1 - \coth^2 u\right)$$

$$(\arg\sinh u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$$
$$(\arg\cosh u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$
$$(\arg\tanh u)' = \frac{u'}{1-u^2}$$
$$(\arg\coth u)' = \frac{u'}{1-u^2}$$

26.4 Différentielle et approximation linéaire

On appelle différentielle de la variable indépendante x, notée dx, la quantité $dx = \Delta x$. On appelle différentielle de la variable dépendante y, notée dy ou df, la quantité définie par :

$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

df est une fonction linéaire de dx.

De la définition on peut déduire que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h)$$

Pour h suffisamment petit, $h \cdot r(h)$ est négligeable et on a l'approximation suivante :

$$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + h \cdot f'(x_0), \text{ où } h \cdot f'(x_0) = df$$

26.5 Fonctions implicites

Considérons l'équation $x^2 + y^2 + \sin(xy) = 0$. Cette équation définit une relation entre x et y. Cette relation porte le nom de fonction implicite de y par rapport à x.

On ne sait pas résoudre y par rapport à x pour obtenir une fonction explicite $y = f(x)$.
Pour obtenir la quantité $y' = \frac{dy}{dx}$ on dérive les deux membres de l'équation par rapport à x, en considérant y comme fonction de x :

$$2x + 3y^2y' + \cos(xy) \cdot \big(y + xy'\big) = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2x + y\cos(xy)}{3y^2 + x\cos(xy)}$$

26.6 Fonctions paramètriques

Si la relation entre x et y est décrite à l'aide d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$ on parle de fonction paramètrique :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

La courbe Γ ainsi définie peut être interprétée comme la trajectoire d'un point matériel, dans le plan, en fonction du temps. Supposons que $x = x(t)$ et $y = y(t)$ sont dérivables par rapport à t :

– $\frac{dx}{dt}$ s'écrit $\dot{x}(t)$ et correspond à la vitesse de l'abscisse ;
– $\frac{dy}{dt}$ s'écrit $\dot{y}(t)$ et correspond à la vitesse de l'ordonnée.

Cherchons la pente m de la tangente à Γ en un point $P\,(x_0; y_0)$, avec $x = x(t_0)$ et $y = y(t_0)$:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_P$$

Or

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\dot{y}(t) \cdot dt}{\dot{x}(t) \cdot dt} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

et à la limite on a

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

d'où

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_P = \left.\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right|_{t=t_0}$$

26.7 Théorème de Rolle et des accroissements finis

Soit f continue sur $I = [a; b]$:

1. f est bornés sur I ;
2. L'image de I par f $[f(I)]$ est un intervalle de I ;
3. f atteint sa borne inférieure m et sa borne supérieure M $(I = [m; M])$;
4. Si $r \in I, \exists\, x_0 \in [a; b]$ t.q. $f(x_0) = r$.

Théorème 26.7.1 (de Rolle). *Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ dérivable sur $]a; b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Alors $\exists\, x_0 \in]a; b[$ t.q. $f'(x_0) = 0$.*

Théorème 26.7.2 (des accroissements finis). *Soit f continue sur $[a; b]$. Alors $\exists\, x_0 \in]a; b[$ t.q.*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

26.8 Variation locale d'une fonction

26.8.1 Croissance, décroissance

Théorème 26.8.1. *Soit* $f : \mathbb{D}_{def} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur un intervalle* I *:*

1. *si* $f'(x) > 0 \ \forall\, x \in I$ *alors* f *est strictement croissante sur* I *;*
2. *si* $f'(x) < 0 \ \forall\, x \in I$ *alors* f *est strictement décroissante sur* I *;*

Remarque 26.8.1. La réciproque est fausse !

26.8.2 Extrema

Définition 26.8.1. Soit $f : \mathbb{D}_{def} \to \mathbb{R}$ une fonction et $c \in \mathbb{D}_{def}$.
- On dit que $f(c)$ est un **maximum local** de f si il existe $\delta > 0$ t.q. $f(x) \leq f(c) \ \forall\, x \in]c-\delta, c+\delta[\cap \mathbb{D}_{def}$;
- c est un maximum global de f si $f(x) \leq f(c) \ \forall\, x \in \mathbb{D}_{def}$
- On dit que $f(c)$ est un **minimum local** de f si il existe $\delta > 0$ t.q. $f(x) \geq f(c) \ \forall\, x \in]c-\delta, c+\delta[\cap \mathbb{D}_{def}$;
- c est un minimum global de f si $f(x) \geq f(c) \ \forall\, x \in \mathbb{D}_{def}$

Théorème 26.8.2. *Soit* $f : \mathbb{D}_{def} \to \mathbb{R}$ *une fonction* dérivable *en* $x_0 \in \mathbb{D}_{def}$. *Si* $f(x_0)$ *est un extremum de* f *alors* $f'(x_0) = 0$.

Remarque 26.8.2. La réciproque est fausse !

Théorème 26.8.3. *Soit* f *une fonction définie et continue sur un intervalle* I, *et* f *dérivable sur* I *sauf peut-être en* x_0. *Alors* f *admet un extremum en* x_0 *ssi* $f'(x)$ *change de signe en* x_0

Remarque 26.8.3. Attention :

1. $f(x_0)$ extremum de $f \not\Rightarrow f'(x_0) = 0$;
2. $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow f(x_0)$ extremum de f.

Remarque 26.8.4. L'abscisse x_0 des extrema de f sont à rechercher dans les situations suivantes :
- aux bornes (éventuelles) du domaine de définition ;
- les $x_0 \in \mathbb{D}_{def}$ t.q. $f'(x_0)$ n'existe pas ($x_0 \in \mathbb{D}_f$ mais $x_0 \notin \mathbb{D}_{f'}$)
- les $x_0 \in \mathbb{D}_{def}$ t.q. $f'(x_0) = 0$

26.8.3 Autres points remarquables

Définition 26.8.2. Soit $f : \mathbb{D}_{def} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable (éventuellement à gauche ou à droite) en $x_0 \in \mathbb{D}_{def}$ et $f'(x_0) = 0$ ($f'(x_{0-}) = 0$ et $f'(x_{0+}) = 0$), alors f admet en x_0 une **tangente (demi-tangente) horizontale**.

Définition 26.8.3. Soit $f : \mathbb{D}_{def} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur I sauf en $x_0 \in \mathbb{D}_{def}$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f'(x_0) = \pm\infty$$

alors f admet en x_0 une **tangente (demi-tangente) verticale**.

Définition 26.8.4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur I sauf en $x_0 \in I$. Si f est dérivable à gauche et à droite de x_0, $f'(x_{0-}) \neq f'(x_{0+})$, alors f admet un **point anguleux** en x_0.

Remarque 26.8.5.

$$\text{Si } \lim_{x \to x_{0-}} f'(x) \text{ existe alors } \lim_{x \to x_{0-}} f'(x) = f'(x_{0-})$$

$$\text{Si } \lim_{x \to x_{0+}} f'(x) \text{ existe alors } \lim_{x \to x_{0+}} f'(x) = f'(x_{0+})$$

Donc plutôt que de calculer les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0, on calcule les limites à gauche et à droite de $f'(x)$.

Cas particulier : Soit f continue sur I et dérivable sur I sauf en $x_0 \in I$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$$

et $f'(x)$change de signe en x_0, alors on dit que f admet un **point de rebroussement** en x_0.

26.8.4 Convexité, concavité, points d'inflexion

Définition 26.8.5. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I telle que $f'(x) \exists \forall x \in I$:

1. Si $f''(x) > 0 \, \forall x \in I$, alors $f'(x)$ est strictement croissante sur I. On dit que le graphe de la fonction f est convexe (concavité tournée vers les y positifs).
   Les tangentes sont en-dessous de la courbe.
2. Si $f''(x) < 0 \, \forall x \in I$, alors $f'(x)$ est strictement décroissante sur I. On dit que le graphe de la fonction f est concave (concavité tournée vers les y négatifs).
   Les tangentes sont au dessus de la courbe.

Définition 26.8.6. Soit f continue sur I et telle que $f''(x)$ existe sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$. Alors $(x_0; f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de f si le graphe de f change de concavité en x_0 (**changement de signe de** $f''(x)$).

26.8.5 Asymptotes

1. Soit $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin \mathbb{D}_f$ mais f définie sur un voisinage pointé de x_0 (éventuellement voisinage à gauche ou à droite de x_0).
   La droite verticale d'équation $x = x_0$ est un **asymptote verticale** de f ssi
   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$
2. Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini. La droite horizontale d'équation $y = y_0$ est un **asymptote horizontale** de f ssi
   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$$
3. Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que
   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$
   La droite d'équation $y = ax + b$ est un **asymptote oblique** de f ssi
   $$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$
   Voici comment recherche une éventuelle asymptote oblique : supposons que $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote de f. On a :
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

(a) si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$$

on dit que f admet une direction asymptotique. On peut poursuivre la recherche de l'éventuelle asymptote :

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$$

i. si

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b \in R$$

alors f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$.

ii. si

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty$$

on dit que f admet une branche parabolique de pente a ou de direction $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

(b) si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

on dit que f admet une branche parabolique d'axe vertical.

26.8.6 Schéma de l'étude complète d'une fonction

1. **Domaine de définition ($\mathbb{D}_f$) ;**
2. Parité, périodicité (restriction éventuelle de $\mathbb{D}_f$) ;
3. **Domaine de continuité de la fonction (étude des discontinuités) ;**
4. Zéros et signe de f (éventuellement) ;
5. **Valeurs limites aux points frontières de $\mathbb{D}_f$;**
6. **Asymptotes éventuelles ;**
7. **Dérivée f', $\mathbb{D}_{f'}$, zéros et signe de f', croissance, extrema, points remarquables ;**
8. Points d'inflexion (éventuellement) ;
9. **Récapitulation sous forme de tableau de variation ;**
10. **Graphe.**

Chapitre 27

Polynômes

27.1 Généralités

Définition 27.1.1. Un polynôme en x est une combinaison linéaire des puissances positives entières de x :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,\ n \in \mathbb{N}$$

- Le degré de $P(x)$ est la plus haute puissance de x ; on le note deg(P) ;
  on a : deg($P+Q$)$\leq$ sup(deg(P), deg(Q)) et deg($P \cdot Q$) $=$ deg(P)$\cdot$deg(Q).
- Le polynôme nul noté 0 est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. Par convention deg(0) $= -\infty$.
- Deux polynômes P et Q sont égaux ssi deg(P) $=$ deg(Q) et si les coefficients des termes de même puissance sont égaux.

27.2 Divisibilité, PGCD

27.2.1 Division euclidienne

Théorème 27.2.1. *Soient P et D deux polynômes ($D \neq 0$). Il existe deux polynômes Q et R tels que $P = D \cdot Q + R$, avec deg(R)<deg(D). Cette décomposition est unique.*

Remarques :
- Si $\mathbb{R}(x) = 0$ alors on dit que D est un diviseur de P ;
- Un polynôme de degré 0 (polynôme constante a_0) divise tout polynôme P :

$$P = a_0 \cdot \left(\frac{1}{a_0} \cdot P\right) + 0$$

- Tout polynôme P divise le polynôme nul : $0 = P \cdot 0 + 0$.

Proposition 27.2.1. *Soient P et T deux polynômes ; si D divise P et T alors, pour tous polynômes A et B, D divise $AP + BT$.*

Proposition 27.2.2. *Soient P et T deux polynômes ($T \neq 0$) et $P = T \cdot Q + R$ le résultat de la division euclidienne de P par T. Alors tout diviseur commun de P et T est un diviseur commun de T et R et réciproquement.*

27.2.2 PGCD et algorithme d'Euclide

Définition 27.2.1. Soient P et T deux polynômes non tous les deux nuls. On appelle plus grand commun diviseur de P et T et on écrit PGCD un polynôme D tel que :
- D divise P et T (diviseur commun) ;
- si D' divise P et T alors D' divise D (c'est le plus grand).

Remarques :
- Si D est un PGCD de P et T alors λD est aussi un PGCD de P et T ;
- Si un PGCD de P et T est une constante, on écrit PGCD(P, T)=1 et on dit que P et T sont premiers entre-eux ;
- Si T divise P alors PGCD(P, T)=T ; si $P \neq 0$ alors PGCD(0, P)=P.

27.2.3 Recherche du PGCD

La recherche du PGCD de deux polynômes P et T se base sur la deuxième proposition et s'effectue à l'aide de l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{rcl}
P & = & T \cdot Q_1 + R_1, \quad deg(R_1) < deg(T) \\
T & = & R_1 \cdot Q_2 + R_2, \quad deg(R_2) < deg(R_1) \\
R_1 & = & R_2 \cdot Q_3 + R_3, \quad deg(R_3) < deg(R_2) \\
 & \cdots & \\
R_{n-2} & = & R_{n-1} \cdot Q_n + R_n
\end{array}$$

L'algorithme d'Euclide prend fin lorsque $R_n = 0$.
Alors PGCD(P, T) = PGCD(T_1, R_1) = PGCD(R_1, R_2) = $\cdots$ = PGCD(R_{n-1}, 0) = R_{n-1}.
Le PGCD de P et T est le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide.

Remarque 27.2.1. A chaque étape de l'algorithme, on peut remplacer un polynôme par son polynôme unitaire.

Théorème 27.2.2. *Soient P et T deux polynômes et D le PGCD de P et T ; alors il existe deux polynômes A et B tels que $D = AP + BP$*

On obtient les polynômes A et B en "remontant" l'algorithme (on suppose que $R_4 = 0$) :

$$\begin{array}{rcl}
R_3 & = & R_1 - R_2Q_3 = \\
 & = & R_1 - (T - R_1Q_2)Q_3 = \\
 & = & R_1(1 + Q_2Q_3) - TQ_3 = \\
 & = & P(1 + Q_2Q_3) + T(-Q_1 - Q_1Q_2Q_3 - Q_3)
\end{array}$$

Ici $A = 1 + Q_2Q_3$ et $B = -Q_1 - Q_1Q_2Q_3 - Q_3$.

27.3 Décomposition des polynômes en facteurs irréductibles

Théorème 27.3.1. *Tout polynôme P réel (respectivement complexe), deg(P)>0, peut être décomposé en $P = P_1^{n_1} \cdot P_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot P_k^{n_k}$, avec p_i polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ (ou $\mathbb{C}[x]$) et $n_1 \in \mathbb{N}^*$.*

27.3.1 Fonction polynômiale

Définition 27.3.1. On appelle racine ou zéro d'un polynôme P tout nombre α (réel ou complexe) vérifiant $P(\alpha) = 0$.

Proposition 27.3.1. *le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par $(x-\alpha)$ est égal à $P(\alpha)$.*

Définition 27.3.2. Soit P un polynôme. On a :

$$[\alpha \text{ est une racine}] \Leftrightarrow [(x-\alpha) \text{ divise } P]$$

On obtient $Q(x)$ quotient de la division de $P(x)$ par $(x-\alpha)$ à l'aide de la division euclidienne ou plus simplement à l'aide du Schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & & a_0 \\
\hline
\alpha & \downarrow & \alpha \cdot b_n & \alpha \cdot b_{n-1} & \cdots & & \alpha \cdot b_1 \\
\hline
 & b_n \nearrow & b_{n-1} \nearrow & b_{n-2} \nearrow & & b_1 \nearrow & b_0
\end{array}$$

Définition 27.3.3. On appelle *multiplicité* d'une racine α d'un polynôme P, l'entier positif $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant la double condition $(x-\alpha)^k$ divise P et $(x-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.

Remarque 27.3.1. Si α est une racine de multiplicité k de P alors

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{k-1}(\alpha) = 0$$

27.3.2 Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[x]$

Théorème 27.3.2. *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[x]$, non constant, a au moins une racine complexe.*

Corollaire 27.3.3. *Un polynôme $P_n \in \mathbb{C}[x]$ de degré n a exactement n racines complexes distinctes ou confondues*

Corollaire 27.3.4. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[x]$ sont les polynômes de premier degré de $\mathbb{C}[x]$.*

Corollaire 27.3.5. *Formules de Viète :*

$$\begin{aligned}
\sigma_1 : \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} &= (-1)^1 \frac{a_{n-1}}{a_n} \\
\sigma_2 : \alpha_1\alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n &= (-1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
&\cdots \\
\sigma_n : \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}
\end{aligned}$$

27.3.3 Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$

Théorème 27.3.6. *Soit $P(z) \in \mathbb{R}[z]$. Si α est une racine complexe de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P.*

Théorème 27.3.7. *Soit $P(z) \in \mathbb{R}[z]$. Si α est une racine complexe de multiplicité k de P alors $\overline{\alpha}$ est une racine de multiplicité k.*

$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ peut être décomposé dans $\mathbb{C}[z]$ en n facteurs irréductibles de premier degré :

$$P(z) = a_n(z-\alpha_1)^{k_1} \cdots (z-\alpha_p)^{k_p} (z-\beta_1)^{l_1} (z-\overline{\beta}_1)^{l_1} \cdots (z-\beta_q)^{l_q} (z-\overline{\beta}_q)^{l_q}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, k_i et $l_i \in \mathbb{N}^*$ et $k_1 + \cdots + k_p + 2(l_1 + \cdots + l_q) = n$.

$(z-\beta)(z-\overline{\beta}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(\beta)z + |\beta|^2 \quad \in \mathbb{R}[z]$, où $z^2 - 2\mathrm{Re}(\beta)z + |\beta|^2 \quad \in \mathbb{R}[z]$ est un polynôme réel de deuxième degré sans racines réelles.

Remarques :

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[z]$ sont les polynômes de premier degré et les polynômes de deuxième degré sans racines réelles.
2. Un polynôme réel de degré impair a toujours au moins une racine réelle et il y en a un nombre impair.
3. Un polynôme réel n'a aucune racine réelle ou en a un nombre pair.

Chapitre 28

Calcul intégral

28.1 Intégrale indéfinie

28.1.1 Définition et généralités

Définition 28.1.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x) \; \forall x \in I$.

Théorème 28.1.1. *Soient f définie sur I et F une primitive de f. Toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.*

Définition 28.1.2. Soit f une fonction définie sur I ; on appelle *intégrale indéfinie* de f l'ensemble de toutes les primitives de f.

Notation

L'intégrale indéfinie de f se note

$$\int f(x)\,dx$$

où $\int$ est le signe d'intégration, $f(x)$ l'intégrant et x la variable d'intégration.

Or

$$\text{Intégrale indéfinie de } f = \text{primitive particulière} + \text{constante arbitraire}$$

donc

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Conséquences

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$;
2. $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$

Propriétés de linéarité

$$\int (f(x) + g(x))\; dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

28.1.2 Quelques intégrales indéfinies

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C,\ n \neq 1$$

$$\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x(\log_a x - log_a e) + C$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \frac{ax+b}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln|cx+d| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arccos x\,dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arctan\ dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x\,dx = \ln(\coth x) + C$$

$$\int \operatorname{arcsinh} x\,dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2+1} + C$$

$$\int \operatorname{arccosh}\ dx = x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int \operatorname{arctanh} x\,dx = x \operatorname{arctanh} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$$

$$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1 + \tan^2 x)\,dx = \tan x + C$$

28.1.3 Recherche de primitives

Méthode basée sur l'observation

On regarde si l'intégrant est la dérivée d'une fonction connue ou la dérivée d'une fonction composée connue.

- si $f(x) = F'(x)$ alors $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
- si $f(x) = [H(u(x))]' = H'(u(x)) \cdot u'(x)$ alors $\int f(x)\,dx = H(u(x)) + C$

Intégration par parties

Cette méthode se base sur la règle de dérivation d'un produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$. En intégrant les deux membres on obtient :

$$\boxed{\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx}$$

L'intérêt et la difficulté de cette méthode est de choisir u et v de sorte que $\int uv'\,dx$ soit plus simple à calculer que $\int u'v\,dx$.

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer la variable d'intégration en posant $x = \varphi(t)$ pour transformer l'intégrant de sorte qu'il soit plus facile à intégrer

Remarque 28.1.1. Le changement de variable doit être réversible, donc φ doit être bijective.

La difficulté de cette méthode réside dans le choix de φ. Posons $x = \varphi(t)$ pour calculer $\int f(x)\,dx$. Alors $f(x) = f[\varphi(t)]$ et $dx = \varphi'(t)\,dt$, d'où

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt$$

Soit $H(t)$ une primitive de $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ alors

$$\int f(x)\,dx = H(t) + C = H\left[\varphi^{-1}(x)\right] + C$$

28.1.4 Intégration des fonction rationnelles

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle. Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$ en effectuant la division euclidienne de P par Q [1] on peut se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur :

$$f(x) = Q_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Remarque 28.1.2. $\deg(R) < \deg(Q)$

[1] $P(x) = Q(x) \cdot Q_1(x) + R(x)$

Décomposition en éléments simples

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$. On décompose cette fonction rationnelle en une somme de fonctions rationnelles plus simples. Cette décomposition se fait en fonction de la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.
On suppose $Q(x)$ unitaire. La décomposition de $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$ donne :

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{l_1} \cdots (x-\alpha_j)^{l_j}(x^2+2a_1x+b_1)^{m_1} \cdots (x^2+2a_kx+b_k)^{m_k}$$

avec $l_1 + \cdots + l_j + m_1 + \cdots + m_k = \deg(Q)$ et $a_i^2 - b_i < 0,\ \forall\ 1 \leq i \leq k$. Alors $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{C_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{C_{1,l_1}}{(x-\alpha_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{C_{j,1}}{(x-\alpha_j)} + \cdots + \frac{C_{j,l_j}}{(x-\alpha_j)^{l_j}} + \\ &+ \frac{d_{1,1}x+e_{1,1}}{x^2+2a_1x+b_1} + \cdots + \frac{d_{1,m_1}x+e_{1,m_1}}{(x^2+2a_1x+b_1)^m} + \cdots + \\ &+ \frac{d_{k,1}x+e_{k,1}}{x^2+2a_kx+b_k} + \cdots + \frac{d_{k,m_k}x+e_{k,m_1}}{(x^2+2a_kx+b_k)^{m_k}} \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients de cette décomposition on utilise une des méthodes suivantes :

1. par identification des numérateurs des deux expressions ;
2. après multiplication éventuelle des deux expressions par un polynôme adéquat, on évalue les deux expression avec des valeurs bien choisies de la variable.

Intégration des éléments simples

On se restreint aux fonction rationnelles dans lesquels les polynômes du deuxième degré apparaissant dans la décomposition du dénominateur sont tous de multiplicité 1.

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{x-\alpha}\, dx = \ln|x-\alpha| + C$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\, dx = \frac{1}{1-n}(x-\alpha)^{1-n} + C,\ n > 1$;
- $\displaystyle\int \frac{ex+f}{x^2+2ax+b}\, dx = \frac{e}{2}\ln(x^2+2ax+b) + \frac{f-ea}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\left(\frac{x-a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C.$
  Remarque 28.1.3. Pour intégrer cette fonction on commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur, puis on intègre $\dfrac{1}{x^2+2ax+b}$, qui donne une fonction arctangente.

28.1.5 Choix de changement de variable

- Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$ ($x \in [-1;1]$) on pose $x = \sin t, t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ ou $x = \cos t, t \in [0;\pi]$;
- Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1+x^2}$ on pose $x = \sinh t$;
- Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2-1}$ ($x \in \mathbb{R}-]-1;1[$) on pose $x = \cosh t$.

Rappels

- $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t},\ t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$;
- $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t},\ t \in [0;\pi]$;

– $\cosh t = \sqrt{1 - \sinh^2 t}$;
– $\sinh t = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$

28.2 Intégrale définie

28.2.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit f une fonction définie et continue sur $[a; b]$. On considère le domaine du plan limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe (Ox) et les deux droites verticales d'équation $x = a$ et $y = b$. L'aire analytique de ce domaine est positive si $f(x) > 0$ et négative si $f(x) < 0$. On cherche à calculer l'aire analytique de ce domaine. On partage l'intervalle $[a; b]$ de façon arbitraire en n intervalles $[x_{k-1}; x_k]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$. La somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k, \quad \text{avec } t_k \in [x_{k-1}; x_k] \text{ et } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

représente la somme des aires analytiques des domaines rectangulaires. C'est une approximation de l'aire cherchée, d'autant plus précise que les Δx_k sont petits.

Définition 28.2.1. La somme $S_n = \sum f(t_k)\Delta x_k$ est appelée *somme de Riemann* de f sur $[a; b]$. Cette somme dépend du partage de $[a; b]$ et du choix des t_k dans l'intervalle $[x_{k-1}; x_k]$.

Définition 28.2.2. Si pour $n \to \infty$ tous les $\Delta x_k \to 0$ et si la limite de S_n existe indépendamment du choix de x_k et des t_k alors f est dite *intégrale* sur $[a; b]$ au sens de Riemann et la limite est appelée *intégrale définie* de f sur $[a; b]$.

L'intégrale défini de f sur $[a; b]$ est notée :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

et mesure l'aire analytique du domaine cherchée :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k\right]}$$

Théorème 28.2.1. *Tout fonction définie et continue sur $[a; b]$ est intégrable sur $[a; b]$ au sens de Riemann.*

28.2.2 Quelques conséquences de la définition

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx, \ \lambda \in \mathbb{R}$
5. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

6. Si $a < b$ et $f(x) \leq g(x) \, \forall x \in [a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

   Remarque 28.2.1. Attention : la réciproque est fausse !

7. Si $a < b$ alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

8. Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

9. Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

28.2.3 Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème 28.2.2 (Moyenne du le calcul intégral). *Soit f continue sur $[a;b]$; il existe $c \in [a;b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(c)$$

Théorème 28.2.3 (Autre expression du thèoreme précédent). *Si $a = x_0$ et $b = x_0 + h$ alors $\exists \theta \in [0;1]$ tel que*

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = h \cdot f(x_0 + \theta h)$$

Théorème 28.2.4 (Théorème fondamental du calcul intégral). *Soit f continue sur $[a;b]$; on considère la fonction F définie sur $[a;b]$ par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Alors F est une primitive particulière de f ; en d'autres termes

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

Conséquences

1. Toute fonction continue sur $[a;b]$ admet une primitive sur $[a;b]$;
2. Soit G une primitive quelconque de f :

$$F(x) = \int_a^b f(t)dt = G(x) + C$$

   – Pour $x = a$ on a $F(a) = 0 \Rightarrow G(a) + C = 0$ d'où $C = -G(a)$
   – Pour $x = b$ on a $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ et $F(b) + G(b) + C = G(b) - G(a)$
   D'où

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(x)|_a^b = [G(x)]_a^b$$

28.3 Applications géométriques du calcul intégral

28.3.1 Calcul d'aire

Rappel Si f est de signe constante sur $]a;b[$ on a

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|,\ a \leq b$$

Remarque 28.3.1. Si $x_0 \in]a;b[$ est un zéro (unique) de f alors

$$A = \left| \int_a^{x_0} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_0}^b f(x)\,dx \right|$$

Il est donc important de faire une esquisse du domaine à étudier.

Γ est définie paramètriquement : Soit

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

On a

$$A = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} |y(x)|\ dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\,dt$$

Aire d'un domaine fini limité par deux courbes Γ_1 et Γ_2 : Soient $\Gamma_1 : y = f_1(x)$ et $\Gamma_2 : y = f_2(x)$. Trois étapes pour calculer l'aire de ce domaine :

1. Esquisse du domaine à étudier ;
2. Recherche des points d'intersection a et b des deux courbes ;
3. Calcul de l'aire :

$$A = \left| \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\ dx \right|$$

Remarque 28.3.2. Si a et b ne sont pas deux points d'intersection consécutifs, alors

$$A = \left| \int_a^{x_0} (f_2(x) - f_1(x))\ dx \right| + \left| \int_{x_0}^b (f_2(x) - f_1(x))\ dx \right|$$

D'où l'importance de l'esquisse.

Remarque 28.3.3. Si les fonctions f_1 et f_2 sont bijectives sur l'intervalle $[a;b]$ alors on peut calculer l'aire du domaine par intégration par rapport à y de la façon suivante : $\Gamma_1 : x = \varphi_1(y)$, $\Gamma_2 : x = \varphi_2(y)$, d'où

$$A = \left| \int_{y_a}^{y_b} (\varphi_2(y) - \varphi_2(y))\ dy \right|$$

Remarque 28.3.4. Si les deux courbes Γ_1 et Γ_2 sont définies par des relations implicites $f_1(x, y) = 0$ et $f_2(x, y) = 0$ on détermine des fonctions explicites de la variable x ou de la variable y sur l'intervalle adéquat.

28.3.2 Calcul du volume d'un corps de révolution

Considérons dans le plan (yOz) un domaine D limité par la courbe d'équation $y = f(z)$. On cherche à calculer le volume V du corps engendré par la rotation de D autour de l'axe Oz.

Tout plan horizontal d'équation $z = z_0$ perpendiculaire à Oz coupe le corps de révolution selon un disque d'aire $A(z_0) = \pi f^2(z_0)$.
On peut donner une approximation du volume cherché à l'aide de la somme de Riemann des volumes élémentaires ΔV, où ΔV c'est le volume d'un cylindre de base $A(z) = \pi f^2(z)$ et de hauteur Δz : $\Delta V = \pi f^2(z) \cdot \Delta z$.
Quand $\Delta z \to 0$, $dV = \pi f^2(z)\, dz$ et

$$V = \pi \int_{z_1}^{z_2} f^2(z)\, dz$$

28.3.3 Volume d'un corps de section d'axe connue

C'est une généralisation du calcul du volume des corps de révolution. On considère un corps dont les sections par des plans parallèles à (xOy) sont connues. Dans le plan $z = z_0$ l'aire de cette section vaut $A(z_0)$. Alors $dV = A(z)\, dz$ et

$$V = \int_{z_1}^{z_2} A(z)\, dz$$

28.3.4 Longueur d'un arc de courbe

Soit f une fonction dérivable sur $[x_A, x_B]$ et Γ la courbe d'équation $y = f(x)$. On cherche à calculer la longueur S de l'arc AB.

Soit $(x_0 = x_A, x_1, \cdots, x_n = x_B)$ un partage de l'intervalle $[x_A, x_B]$ avec $x_{k-1} < x_k\ \forall 1 \leq k \leq n$ et soit P_k le point Γ d'abscisse x_k.

Soient $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ la longueur de l'arc de Γ entre p_{i-1} et P_i et ΔS_i la longueur du segment $[P_{i-1}; P_i]$.
ΔS_i est une approximation de $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ d'autant plus précise que Δx_i est petit :

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \text{ (Phytagore)}$$

D'où

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_1}\right)} \Delta x_i$$

S_n est une approximation de la longueur cherchée. Lorsque $n \to \infty$ et $\Delta x_1 \to 0$ alors $S_n \to S$:

$$\boxed{S = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Remarque 28.3.5. Si la courbe Γ est définie paramètriquement alors $dx = x'(t)\, dt$ et $dy = y'(t)\, dt$ d'où

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

Quatrième partie

Analyse II

Chapitre 29

Relations trigonométriques

29.1 Relations entre les fonctions trigonométriques

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\tan x = \frac{1}{\cot x} \quad , \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$
$$\tan x \cdot \cot x = 1$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

29.2 Symétries

$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$
$\cot(-x) = -\cot x$	$\cot(\pi - x) = -\cot x$	$\cot(\pi + x) = \cot x$	$\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$

Application :

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = (\frac{\pi}{2} - (-x)) = \cos(-x) = \cos x$$

29.3 Équations trigonométriques simples

$$\cos x_0 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = x_0 + 2k\pi \\ x_h = -x_0 + 2h\pi \end{cases} \quad k, h \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x_0 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = x_0 + 2k\pi \\ x_h = \pi - x_0 + 2h\pi \end{cases} \quad k, h \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan x_0 = a \Leftrightarrow x = x_0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot x_0 = a \Leftrightarrow x = x_0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

29.4 Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \\
\cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta\cot\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\beta \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 \mp \tan^2\alpha} \\
\cot 2\alpha &= \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\
\cos 2\alpha &= \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

29.5 Formules de bissection

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) \\
\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1+\cos\alpha) \\
\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \\
\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \\
\cos\alpha &= \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \\
\tan\alpha &= \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \\
\cot\alpha &= \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Chapitre 30

Équations trigonométriques linéaires

On pourra résoudre les équations du type $A \sin px + B \cos px = k$.

Remarque 30.0.1. sin et cos ont le même argument.

30.1 Méthode 1

On transforme l'équation sous la forme $A \sin px + B \cos px = C \sin(px + q)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} C \cos q & = & A \\ C \sin q & = & B \\ C & = & +\sqrt{A^2 + B^2} \\ \text{d'où} \cos q & = & \dfrac{A}{C} \\ \sin q & = & \dfrac{B}{C} \end{array}$$

Sous la condition $k^2 \leq A^2 + B^2$ on considère l'équation $C \sin(px + q) = k$ à résoudre.

30.2 Méthode 2

On transforme l'équation sous la forme $A \sin px + B \cos px = C \sin(px - q)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} C \cos q & = & B \\ C \sin q & = & A \\ C & = & +\sqrt{A^2 + B^2} \\ \text{d'où} \cos q & = & \dfrac{B}{C} \\ \sin q & = & \dfrac{A}{C} \end{array}$$

Sous la condition $k^2 \leq A^2 + B^2$ on considère l'équation $C \sin(px - q) = k$ à résoudre.

30.2.1 Utilisation d'une variable auxiliaire

Soit à résoudre l'équation $f(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x) = 0$ (Attention $\mathbb{D}_{def}$).
On ramène l'équation à la forme polynômiale $P(\sin x, \cos x) = 0$.
À l'aide d'une variable auxiliaire on ramène cette équation à la forme $P(z) = 0$, où z est la variable auxiliaire réelle et $P(z) = a_0 + a_1\, z + \cdots + a_n\, z^n$.

Le choix de la variable se fait selon les critères suivants :
- si l'équation de départ est invariante lorsqu'on remplace x par $(-x)$ on pose $z = \cos x$;
- si l'équation de départ est invariante lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$ on pose $z = \sin x$;
- si l'équation de départ est invariante lorsqu'on remplace x par $(\pi + x)$ on pose $z = \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$;
- dans les autres cas on pose $z = \tan \frac{x}{2}$.

Chapitre 31

Relations dans les triangles

31.1 Théorème du cosinus

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \text{ avec } p = \frac{a+b+c}{2}$$

31.2 Théorème du sinus

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

On peut calculer l'aire du triangle : $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Ainsi :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S}$$

Soit Γ le cercle circonscrit (rencontre des médiatrices) et r le rayon. On obtient :

$$\frac{abc}{4S} = r$$

Ainsi :

$$2r = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S}$$

$$\text{et } S = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

31.3 Aire du triangle et formule de Héron

On peut exprimer l'aire d'un triangle en fonction des côtes :

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

où p est le demi-périmètre. D'où :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\
\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\
\tan\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}
\end{aligned}$$

Chapitre 32

Fonctions trigonométriques inverses

32.1 Arc sinus

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, \text{ avec } x \in [-1; 1] \text{ et } y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

32.1.1 Propriétés

- $\arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1; 1]$;
- $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 1]$;
- $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in]-1; 1[$;
- $\arcsin(-x) = -\arcsin(x), x \in [-1; 1]$.

32.2 Arc cosinus

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y, \text{ avec } x \in [-1; 1] \text{ et } y \in [0; \pi]$$

32.2.1 Propriétés

- $\arccos(\cos x) = x, x \in [0; \pi]$;
- $\cos(\arccos x) = x, x \in [-1; 1]$;
- $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 1]$;
- $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in]-1; 1[- 0$;
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x), x \in [-1; 1]$.

On a aussi :

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

32.3 Arc tangente

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y, \text{ avec } x \in [-1; 1] \text{ et } y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

32.3.1 Propriétés

- $\arctan(\tan x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\tan(\arctan x) = x, x \in \mathbb{R}$;
- $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x\mathbb{R}$;
- $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x\mathbb{R}$;
- $\arctan(-x) = -\arctan(x), x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 33

Dérivées des fonctions trigonométriques

33.1 Dérivées des fonctions trigonométriques

$$
\begin{aligned}
\sin' x &= \cos x \\
\cos' x &= -\sin x \\
\tan' x &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\
\cot' x &= 1 + \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

33.1.1 Cas où l'argument est dérivable

$$
\begin{aligned}
[\sin [f(x)]]' &= \cos [f(x)] \cdot f'(x) \\
[\cos [f(x)]]' &= -\sin [f(x)] \cdot f'(x) \\
[\tan [f(x)]]' &= \left[1 + \tan^2 [f(x)]\right] \cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

33.2 Dérivées des fonctions trigonométriques inverses

$$
\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\
\arccos'(x) &= \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\
\arctan'(x) &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}
\end{aligned}
$$

Chapitre 34

Fonction exponentielle et logarithmique

34.1 Fonction exponentielle

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - 1$, il existe une seule bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ notée $\exp_a$ telle que :

- $\exp_a(u+v) = \exp_a(u) \cdot \exp_a(v)$
- $\exp_a(1) = a$
  - si $a \in]0;1[$, $\exp_a$ est strictement décroissante
  - si $a \in]1;\infty[$, $\exp_a$ est strictement croissante

La fonction $\exp_a$ est dérivable et $\exp_a'(x) = \exp_a(0) \cdot \exp_a(x)$

34.1.1 Propriétés

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - 1$, $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$a^0 = 1, a^1 = a, 1^x = 1$$
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$a^{xy} = (a^x)^y$$

34.2 Fonction Logarithmique

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - 1$, $x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

De plus

$$y = \log_a a^x \Leftrightarrow a^{\log_a x} = x$$

34.2.1 Propriétés

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^* - 1$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -log_a x$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$$
$$\log_a x^z = z \log_a x$$
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

34.2.2 Dérivée

On a :

$$(\ln|u|)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$
$$(\log_a |u|)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$

Chapitre 35

Fonctions trigonométriques hyperboliques

35.1 Définitions

$$
\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ (> 0\ \forall x \in \mathbb{R}) \\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1} \\
\coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1}
\end{aligned}
$$

$$(\sinh u)' = \cosh u \cdot u'$$

$$(\cosh u)' = \sinh x \cdot u'$$

$$(\tanh u)' = \frac{u'}{\cosh^2 u} = u'\left(1 - \tanh^2 u\right)$$

$$(\coth u)' = -\frac{u'}{\sinh^2 u} = u'\left(1 - \coth^2 u\right)$$

On a aussi :

$$
\begin{aligned}
\cosh x + \sinh x &= e^x \\
\cosh x - \sinh x &= e^{-x} \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1
\end{aligned}
$$

35.2 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

On pose $t = \tanh \frac{x}{2}$. On a :

$$
\begin{aligned}
\cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\
\cosh^2 \frac{x}{2} &= \frac{1}{1-t^2} \\
\cosh x &= 2\cosh^2 \frac{x}{2} \\
\cosh x &= \frac{1+t^2}{1-t^2} \\
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\
\cosh 2x &= 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1
\end{aligned}
$$

35.3 Fonctions hyperboliques inverses

35.3.1 Fonction argument sinus hyperbolique

$$\begin{array}{rcl} y = \arg\sinh x & \Leftrightarrow & x = \sinh y \\ \forall x \in \mathbb{R}, \arg\sinh(\sinh x) = x & \text{et} & \sinh(\arg\sinh x) = x \\ \arg\sinh' x & = & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \arg\sinh x & = & \ln(x + \sqrt{x^2+1}), x \in \mathbb{R} \end{array}$$

35.3.2 Fonction argument cosinus hyperbolique

$$\begin{array}{rcl} y = \arg\cosh x & \Leftrightarrow & x = \cosh y, x \geq 1, y \geq 0 \\ \arg\cosh(\cosh x) = x, x \in [0; +\infty[& \text{et} & \cosh(\arg\cosh x) = x, x \in [1; +\infty[\\ \arg\cosh' x & = & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1 \\ \arg\cosh x & = & \ln(x + \sqrt{x^2-1}), x \geq 1 \end{array}$$

35.3.3 Fonction argument tangente hyperbolique

$$\begin{array}{rcl} y = \arg\tanh x & \Leftrightarrow & x = \tanh y, -1 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R} \\ \arg\tanh(\tanh x) = x, x \in \mathbb{R} & \text{et} & \tanh(\arg\tanh x) = x, x \in]-1; 1[\\ \arg\tanh' x & = & \dfrac{1}{1-x^2}, x \in]-1; 1[\\ \arg\tanh x & = & \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), -1 < x < 1 \end{array}$$

Chapitre 36

Croissances comparés : logarithmes, puissances, exponentielles

36.1 Règle de Bernoulli-l'Hospital

On considère deux fonctions f, g : $[a,b] \mapsto \mathbb{R}$, dérivables avec $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0 \,\forall\, x \in]a,b[$.

1. Si
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \text{ ou } = \infty \quad \left(\frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}\right)$$
alors
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
si
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
existe.
2. On a l'énoncé précédent en remplaçant $x \to a^+$ par $x \to b^-$.
3. L'énoncé reste vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$

36.2 Autres indéterminations

36.2.1 Indétermination du type $0 \cdot \infty$

On a
$$u(x) \cdot v(x)$$
avec $u(x) \to 0$ et $v(x) \to \infty$. On peut appliquer la transformation :
$$\begin{aligned} \frac{u(x)}{1/v(x)} &= \frac{0}{0} \\ \frac{v(x)}{1/u(x)} &= \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

36.2.2 Indétermination du type ∞^0

On a

$$(u(x))^{v(x)}$$

avec $u(x) \to \infty$ et $v(x) \to 0$. On peut appliquer la transformation :

$$\ln(u(x))^{v(x)} = v(x) \cdot \ln u(x)$$

à transformer en $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

36.2.3 Indétermination du type 1^∞

On a

$$(u(x))^{v(x)}$$

avec $u(x) \to 1$ et $v(x) \to \infty$. On peut appliquer la transformation :

$$\ln(u(x))^{v(x)} = v(x) \cdot \ln u(x)$$

à transformer en $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

36.2.4 Indétermination du type 0^0

On a

$$(u(x))^{v(x)}$$

avec $u(x) \to 0^+$ et $v(x) \to 0$. On peut appliquer la transformation :

$$\ln(u(x))^{v(x)} = v(x) \cdot \ln u(x)$$

à transformer en $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

36.3 Croissances composées(logarithmes, puissances, exponentielles)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \ \ \forall\ \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \ \ \forall\ \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\ln x|^\beta}{x^\alpha} = 0 \ \ \forall\ \alpha, \beta > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0 \ \ \forall\ \alpha, \beta > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \ \ \forall\ \alpha > 0, \forall a > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} \cdot x^\alpha = 0 \ \ \forall\ \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = +\infty \ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) \cdot e^{-px} = 0 \ \ \forall \text{ polynôme } P(x)$$

Chapitre 37

Nombres complexes

37.1 Forme algébrique ou standard des nombres complexes

37.1.1 Définition

$$\boxed{z = x + iy \text{ ou } z = x + yi, \text{ avec } i^2 = -1,\ x, y \in \mathbb{R}}$$

x est la partie réelle de z : $\mathrm{Re}(z)$; y est la partie imaginaire de z : $\mathrm{Im}(z)$.

Remarque 37.1.1. Tout complexe (non nuls) dont la partie réelle est nulle est dit *imaginaire pur*. Remarquer aussi :
- $z = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$
- $z = z' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$

37.1.2 Calculs

L'addition et la multiplication s'effectuent comme dans $\mathbb{R}$; on tient compte du fait $i^2 = -1$.
$\forall\ z, z' \in \mathbb{C}$ on a :
- $(z \pm z')^2 = z^2 \pm 2zz' + z'^2$
- $(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2$

Remarque 37.1.2. $(x - iy)(x + iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 \cdot y^2 = x^2 + y^2$

Ainsi des expressions non factorisables dans $\mathbb{R}$ le sont dans $\mathbb{C}$.

37.2 Nombres complexes conjuguées

Définition 37.2.1. $\overline{z} = x - iy$ est le complexe conjugué de $z = x + iy$.

Donc $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$, où $x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module de z.

37.2.1 Application au calcul d'un quotient

Soit $z = x + iy \neq 0$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

37.2.2 Propriétés

1. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = z + \overline{z}$
   $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \Leftrightarrow 2i\mathrm{Im}(z) = z - \overline{z}$
2. Si $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{z} = z$;
   Si z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow z \neq 0$ et $z + \overline{z} = 0$. Notons que 0 est souvent noté à la fois comme réel et comme imaginaire pur.
3. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
4. $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
5. $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$
6. Si f est un polynôme ou une fraction fractionnelle à coefficients réels, alors
   $\overline{f(z_1, \cdots, z_n)} = f(\overline{z_1}, \cdots, \overline{z_n})$

37.3 Résolution dans $\mathbb{C}$ de $ax^2 + bx + c = 0$

$$az^2 + bz + c = 0, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2z^2 + 4baz + 4ac &= 0 \\ \Leftrightarrow (2az + b)^2 &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

On dit que $2az + b$ est racine carrée (au sens complexe) de $b^2 - 4ac$. On a :

$$2az + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\boxed{z = \frac{-b \overset{\triangle\searrow}{+} \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ on a $\Delta = -|\Delta|$ l'équation admette 2 racines complexes conjuguées :

$$\boxed{z = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$$

37.4 Complexe conjugué, module d'un complexe

Soit $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$. On définit le module de z par

$$\boxed{|z| = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Conséquences :

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= |z|^2 = x^2 + y^2; \\ |z| &= |\overline{z}|, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0; \\ |z \cdot z'| &= |z| \cdot |z'|, \quad |z^n| = |z|^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; \\ \left|\frac{z}{z'}\right| &= \frac{|z|}{|z'|}, \quad z' \neq 0. \end{aligned}$$

Remarque 37.4.1 *(Inégalité triangulaire).* La module de la somme n'est pas la somme des modules ! On a :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

37.4.1 Affixe d'un vecteur

Pour un point P on a :

$$z = x + iy \Leftrightarrow P(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pour un vecteur $\overrightarrow{PP'}$ on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP'} &= \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} \\ z &= x + iy \\ z' &= x' + iy' \\ \overrightarrow{PP'} &= \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque 37.4.2. Soient z et z' deux complexes et $P(z)$ et $P'(z')$ leurs images ; $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OP'}$ sont les rayons vecteurs images correspondant. Pour avoir le vecteur image de la somme $z + z'$ il suffit d'appliquer al règle du parallélogramme.

37.5 Cercle et disque du plan $\mathbb{C}$

$\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $z \in \mathbb{C}$ on a :
- $\gamma(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$: cercle de centre $\Omega(z_0)$ et de rayon r ;
- $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$: disque fermé de centre $\Omega(z_0)$ et de rayon r ;
- $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$: disque ouvert de centre $\Omega(z_0)$ et de rayon r ;

37.6 Forme trigonométrique d'un complexe

Soient $z = x + iy$ non nul et $\theta = \angle\left(Ox, \overrightarrow{OP}\right)$.
On a $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. D'où $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ou, plus simplement, $z = [r, \theta]$.

θ est appelé l'*argument* de z, noté arg z.

Remarque 37.6.1. arg z est périodique : en fait arg $z = \theta\ [mod\, 2\pi]$.

Notation : la donnée de son module r et d'un des ses arguments θ caractérise complètement un nombre complexe non nul ; on utilise donc la notation $z = [r, \theta]$

37.6.1 Conséquences

Soit $z = [r, \theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = [r', \theta]$; alors $\overline{z} = [r, -\theta]$ et $-z = [r, \theta + \pi]$
- $z = z'$ et $zz' \neq 0 \Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $z' = -z$ et $zz' \neq 0 \Leftrightarrow r = r'$ et $\theta' = \theta + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- z réel $\Leftrightarrow z = 0$ ou arg $z = k\pi$;
- $z > 0 \Leftrightarrow \theta = 2k\pi$;
- $z < 0 \Leftrightarrow \theta = (2k+1)\pi$;
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow z = 0$ ou arg $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$

37.6.2 Forme trigonométrique et forme algébrique

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $r > 0$ on a :

$$\boxed{x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{array} \right.}$$

37.7 Produit de deux complexes

Soit Soit $z = [r,\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = [r',\theta']$, $zz' \neq 0$. Alors

$$[r,\theta] \cdot [r',\theta'] = [rr', \theta + \theta']$$

37.7.1 Puissances entières d'un complexe

$$\boxed{z^n = [r^n, n\theta]}$$

De plus

$$\begin{array}{rcl} |z^n| & = & |z|^n \\ \arg z^n & = & n \arg z \quad [\text{mod } 2\pi] \end{array}$$

37.7.2 Quotient de deux complexes

Soit Soit $z = [r,\theta]$ et $z' = [r',\theta']$, $zz' \neq 0$. Alors

$$\boxed{\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]}$$

De plus

$$\begin{array}{rcl} z^{-n} & = & \left[\frac{1}{r^n}, -n\theta'\right] \\ \left|z^{-n}\right| & = & \frac{1}{|z|^n} \\ \arg z^{-n} & = & -n \arg z \quad [\text{mod } 2\pi] \end{array}$$

Conséquences :

$$\begin{array}{rcl} (zz')^m & = & z^m z'^m \\ z^m z^n & = & z^{m+n} \\ (z^m)^n & = & z^{mn} \end{array}$$

37.7.3 Formules de Moivre

Soit $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = [r^n, n\theta]$. On a :

$$\boxed{(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta}$$

$$\boxed{(\cos\theta \pm i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta \pm i\sin(-n\theta)}$$

37.7.4 Évaluation d'un angle à l'aide des complexes

Soit $\theta = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, alors

$$\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$$

Si $\theta = \angle(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$ alors

$$\theta = \arg\left(\frac{z_Q - z_P}{z_R - z_P}\right)$$

Si $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$ alors $\frac{z_Q - z_P}{z_R - z_P}$ est un complexe imaginaire pur.
Si $\overrightarrow{PR} \parallel \overrightarrow{PQ}$ alors $\frac{z_Q - z_P}{z_R - z_P}$ est un nombre réel.

37.8 Racine d'un complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$; w est une racine n-ième ($n \in \mathbb{N}^*$), notée $w = z^{1/n}$ ssi $z = w^n$. Donc

$$w = z^{1/n} \Leftrightarrow z = w^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

37.8.1 Expression des racines n-ièmes

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$. On cherche $w \in \mathbb{C}$ t.q. $z = w^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $z = 0$ on a $w = 0$ comme unique solution ;
- Si $z \neq 0$ il existe exactement n racine n-ièmes de z qui sont

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad 0 \leq k \leq (n-1)$$

On a aussi

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right], \quad 0 \leq k \leq (n-1)}$$

37.8.2 Représentation graphique

Les n racines n-ième de $W = [r, \theta]$ sont toutes de même module $\sqrt[n]{r}$.
Les images de ces complexes sont donc toutes sur le cercle O et re rayon $\sqrt[n]{r}$.
A partir de $z_0 = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n}\right]$, on en déduit les autres solutions par rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, de l'image de z_0. Les images des n racines $z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ forment un polynôme régulier à n côtes inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{n}$.

37.9 Polynôme et équation de troisième degré

37.9.1 Étude du polynôme de troisième degré (forme canonique)

Soit $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ \in \mathbb{C}[x]$, $a \neq 0$. On pose $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Si on développe selon les puissances de $\left(x + \frac{b}{3}\right)$ on obtient

$$P = \left(x + \frac{b}{3}\right) + \left(c - \frac{b}{3}\right)\left(x + \frac{b}{3}\right) + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$$

Le terme de deuxième degré en $\left(x + \frac{b}{3}\right)$ n'existe pas, par conséquent si on substitue x avec $x - \frac{b}{3}$ on peut considérer l'équation sous la forme

$$Q = x^3 + px + q = 0 \text{ avec } p = c - \frac{b^2}{3}, q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$$

Si x_0 est solution de Q alors $\left(x_0 - \frac{b}{3}\right)$ est solution de P.

37.9.2 Résolution de l'équation de troisième degré

Soit $Q = x^3 + px + q = 0$
- Si $p > 0$ Q admet une seule racine réelle ($\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$)
- Si $p < 0$ Q admet trois racines réelles ($\Delta = 4p^3 + 27q^2 \leq 0$)

Détermination des racines

- Si $p = 0$ la résolution est immédiate.
- Si $p \neq 0$ on pose $x = u + v$. L'équation devient

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

En développant

$$u^3 + v^3 + (u + v)(p + 3uv) + q = 0$$

On impose $uv = -\frac{p}{3}$, d'où $u^3 + v^3 = -q$.

Or $uv = -\frac{p}{3}$ (donc $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$) d'où u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $z^2 + qz - \dfrac{p^3}{27}$.

D'où $z_{1,2} = -\dfrac{q}{2} \pm \dfrac{\sqrt{4p^3 + 27q^2}}{27}$. Donc les racines de Q s'écrivent $x = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}$

37.10 Cas d'une seule racine réelle

Si $\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$ alors $z_{1,2} \in \mathbb{R}$, et l'unique solution réelle est donnée par

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}}$$

x_2 et x_3 sont complexes conjuguées.

37.11 Cas des trois solutions réelles

37.11.1 Existence d'une racine réelle double ($\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$)

Si $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$ les trois racines sont réelles, dont une est double. La racine double est donnée par $x_0 = \sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$; l'autre est $x_1 = -\sqrt[3]{4p}$.

37.11.2 Trois racines réelles ($\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$)

Rappels

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

Détermination des solutions réelles

Dans $Q = x^3 + px + q = 0$ on fait la substitution $x = w\cos\theta$ $(w \neq 0)$.
On a donc

$$w^3\cos^3\theta + pw\cos\theta + q = 0 \Leftrightarrow \cos^3\theta + \frac{p}{w^2}\cos\theta + \frac{q}{w^3} = 0$$

Or $\cos^3\theta = \dfrac{1}{4}\cos 3\theta + \dfrac{3}{4}\cos\theta$, d'où

$$\frac{1}{4}\cos 3\theta + \left(\frac{p}{w^2} + \frac{3}{4}\right)\cos\theta + \frac{q}{w^3} = 0$$

Il suffit de poser $\frac{p}{w^2} = -\frac{3}{4}$, soit $w^2 = \frac{4p}{3}$ (par exemple $w = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$). pour que l'équation prenne la forme $\cos 3\theta = -\frac{4q}{w^3}$, soit $\cos 3\theta = \frac{3}{2}\frac{q}{p}\sqrt{-\frac{3}{p}}$

Or il y a trois racines réelles qui sont données facilement par

$$x_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{3}\right) \quad k = 0, 1, 2$$

37.12 Quelques fonctions complexes

37.12.1 Fonction inverse

Comme dans les réels on a $w = f(z)$ et $z = \varphi(w)$.

37.12.2 La fonction $z \rightarrow z + a$

Soient $a = a_1 + ia_2$, $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

On a une translation de vecteur $\vec{a}$.

37.12.3 La fonction $z \rightarrow kz,\ k \in \mathbb{R}$

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a :

$$z' = kz,\ k \in \mathbb{R}$$

E forme trigonométrique on a :

$$z = [r; \theta] \rightarrow z' = [kr; \theta],\ k > 0$$

On a une homothétie de centre O et de rapport k.

37.12.4 La fonction $z \rightarrow az,\ |a| = 1,\ a \neq 1$

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ on a :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow z' = az = \delta(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Sous forme matricielle on a :

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\overrightarrow{OP}$$

37.12.5 La fonction $z \to az$, $|a| \neq 1$, $a \neq 0$

Soit $z = [r;\theta]$, $a = [k;\alpha]$ et $z' = [\delta;\varphi]$. Comme transformation géométrique on a une similitude $S(O;k;\alpha)$. Sous forme matricielle on a :

$$\overrightarrow{OP'} = k \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \overrightarrow{OP}$$

37.12.6 La fonction $z \to az + b$

- Si $a = 1$ on a $z \to z + b$ (cas déjà vu) ;
- Si $a \neq 1$ la transformation est une similitude :

$$\overrightarrow{OP'} = k \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \overrightarrow{OP} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \; c, d \in \mathbb{R}$$

37.13 La transformation de Möbius

Définitions

Soit la *transformation* de Möbius ou fonction *homographique* :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\to w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \neq -\frac{d}{c} \end{aligned}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$.

Pour $a = d = 0$ et $b = c = 1$ on obtient

$$I : z \to w = \frac{1}{z}$$

qui est l'*inversion*.

- $c = 0$

  La fonction devient

  $$w = \frac{az+b}{d}, \; d \neq 0 \text{ (par hypothèse} ad - bc \neq 0)$$

  On a donc une similitude.
- $c \neq 0$

  La fonction est définie dans le plan complexe fermé [1] et sa valeur au point P d'affixe $z = -\frac{d}{c}$, appelé *pôle* de la fonction, est égale à ∞.

  Au point à l'infini $z = \infty$ on pose $lim_{x\to\infty} w = \frac{a}{c}$

Remarque 37.13.1. On peut résoudre l'équation homographique de départ de manière unique à z :

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

La fonction homographique peut se mettre sous la forme

$$w = A + \frac{B}{z-P}, \; A, B, C \in \mathbb{C}$$

Remarque 37.13.2. $A = \frac{a}{c}, B = \frac{bc-ad}{c^2}, P = -\frac{d}{c}$

[1] on ajoute les point à l'infini

Étude de l'inversion

Soit $z = x + iy$ dans le plan z et $w = u + iv$ dans le plan w. On a :

$$u + iv = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

donc

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \quad x, y \neq 0$$

Or $z = \frac{1}{w}$ d'où

$$\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = -\frac{v}{u^2+v^2} \end{cases} \quad x, y \neq 0$$

Transformation d'une droite

Soient dans le plan z la droite $d : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $\alpha, \beta \neq 0$ et la fonction $w = h(z) = \frac{1}{z}$. Dans le plan w on aura :

$$\alpha\frac{u}{u^2+v^2} - \beta\frac{v}{u^2+v^2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha u - \beta v + \gamma(u^2+v^2) = 0$$

1er cas : $P(0;0) \in d$ $(\gamma = 0)$

En remplaçant x et y dans l'équation de la droite on obtient :

$$h(d) = d' : \alpha u - \beta v = 0$$

L'image dans le plan w est une droite.

2ème cas : $P(0;0) \notin d$ $(\gamma \neq 0)$

En remplaçant x et y dans l'équation de la droite on obtient :

$$h(d) = \Gamma' : u^2 + v^2 + \frac{\alpha}{\gamma}u - \frac{\beta}{\gamma}v = 0$$

Transformation d'un cercle

Soient dans le plan z le cercle $\Gamma\left(\Omega(\alpha;\beta); R\right)$ et la fonction $w = h(z) = \frac{1}{z}$. Dans le plan w on aura :

$$h(\Gamma) : \left(\frac{u}{(u^2+v^2)} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{v}{u^2+v^2-\beta}\right) - R^2 = 0$$

1er cas : $P(0;0) \in \Gamma$ $(\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0)$

En remplaçant x et y dans l'équation du cercle on obtient une droite :

$$h(\Gamma) = d' : -2\alpha u + 2\beta v + 1 = 0$$

2ème cas : $P(0;0) \notin \Gamma$ $(\alpha^2 + \beta^2 - R^2 \neq 0)$

En remplaçant x et y dans l'équation du cercle on obtient un cercle.

Conclusion

La transformation de Möbius transforme droites *et* cercles du plan z en droites *ou* cercles du plan w :

- **Transformation d'une droite**
  - $P \in d \Rightarrow h(d) = d'$
  - $P \notin d \Rightarrow h(d) = \Gamma'$
- **Transformation d'un cercle**
  - $P \in \Gamma \Rightarrow h(d) = d'$
  - $P \notin \Gamma \Rightarrow h(d) = \Gamma'$

Chapitre 38

Intégration de fraction rationnelles

Soit $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, où $R(\sin x, \cos x)$ est une fraction rationnelle en $\sin x$ et à $\cos x$. On veut faire une substitution qui nous ramène à $\displaystyle\int R(t)\, dt$, où $R(t)$ est une fraction rationnelle en t.

38.1 Règles de Bioche

Si la forme différentielle $\omega(x) = f(x)\, dx = R(\sin x, \cos x) dx$ est invariante pour la substitution

- x en $\pi - x$ ($\omega(\pi - x) = \omega(x)$) on pose $t = \sin x$;
- x en $-x$ ($\omega(-x) = \omega(x)$) on pose $t = \cos x$;
- x en $\pi + x$ ($\omega(\pi + x) = \omega(x)$) on pose $t = \tan x$;
- sinon on pose $t = \tan \frac{x}{2}$

Remarque 38.1.1. $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\, dt$

Chapitre 39

Développements limités

39.1 Définitions

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $x = 0$; f admet au voisinage de $x = 0$ un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ ssi existe un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x) = 0, \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Autre notation : $g(x) = o(x^n) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^n} = 0 \Rightarrow f(x) = P_n(x) + o(x^n)$.

Remarque 39.1.1. On peut définir le développement limité à droite ou à gauche de $x = 0$

Remarque 39.1.2. Si f est définie au voisinage de $x = x_0$, parler de développement limité de f autour de $x = x_0$ revient à parler du développement de θ :

$$\theta(t) = f(t + x_0) \text{ au voisinage de } t = 0$$

(Changement de variable $x = x_0 + t$).

39.2 Relations à la continuité et à la dérivabilité

- f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 0$ en $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = a_0$;
- f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 0$ autour de $x = 0 \Leftrightarrow f$ est prolongeable par continuité en $x = 0$;
- f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en $x = 0 \Leftrightarrow f$ ou sa prolongé en $x = 0$ est dérivable en $x = 0$:

$$f(x) = a_0 + a_1 n + x\varepsilon(x), \ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0, \ f'(0) = a_1$$

39.3 Existence d'un développement limité de quelques fonctions

1. $f(x) = \arg\cosh(x)$, $\mathbb{D}_d ef = [1; +\infty]$
   $f(x)$ ne contient aucun voisinage en $x = 0$, donc f n'a pas de développement limité en $x = 0$.
2. $g(x) = \cot(x)$
   $g(x)$ n'a pas de limite finie en $x = 0$, donc g n'a pas de développement limité en $x = 0$.

3. Une fonction polynômiale à autour de 0 un développement limité à tout ordre n.
   Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$.
   – si $n < m$ on a $f(x) = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + \left(a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_mx^m\right)$;
   – si $n > m$ on a $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + x^n\varepsilon(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

39.4 Propriétés

39.4.1 Unicité

Si f a un développement limité autour de $x = 0$ à l'ordre n ce développement limité est unique :

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x) + Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x),\ \lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0, i = 1, 2$$

39.4.2 Parité

Si f est paire (respectivement impaire) et elle admet un développement limité en $x = 0$, alors sa partie polynômiale est paire (respectivement impaire).

39.4.3 Troncature

Si $f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ alors f admet un développement limité à l'ordre m où $0 \le m \le n$.

39.4.4 Partie principale d'un développement limité

Soit $f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x)$.
Soit $P_n = a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_nx^n$ non nul ($a_p \neq 0$). Alors on écrit

$$f(x) \underset{x=0}{\widetilde{\ \ }} a_px^p$$

où a_px^p est la partie principale du développement limité.

39.5 Détermination des développements limités

39.5.1 La formule de Tylor-Young

Soit f une fonction continuement dérivable sur un voisinage de $x = 0$ ($f^{(n)}$ est définie et continue dans le voisinage de $x = 0$) ; alors f admet en $x = 0$ un développement limité à l'ordre n donné par la formule de Tylor-Young :

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2f''(0)}{2!} + \cdots + \frac{x^nf^{(n)}(0)}{n!} + x^n\varepsilon(x)}$$

Remarque 39.5.1. Avec la formule de Tylor-Young on un développement limité des fonctions simples. En général on applique les opérations sur les développements.

Remarque 39.5.2. Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$. Si on sait que f possède n dérivables successives en $x = 0$, alors avec l'unicité du développement limité on a

$$f^{(n)}(0) = k!a_k,\ k = 0, 1, \cdots, n$$

39.5.2 Développements limités des fonctions simples

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o\left(x^{10}\right) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\
\ln(1-x) &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-(n-1))}{n!}x^n + o\left(x^n\right) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o\left(x^{10}\right)
\end{aligned}
$$

39.6 Opérations sur les développements limités

39.6.1 Structure d'espace vectoriel

L'ensemble E des fonctions réelles définies au voisinage de $x = 0$ et possédant en $x = 0$ un développement limité à l'ordre n est un $\mathbb{R}$-vectoriel.
Soient $f_1(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ et $f_2(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)$; $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = R_n(x) + x^n \varepsilon(x)$$

avec $R_n = \lambda_1 P_n + \lambda_2 Q_n$ et $\varepsilon(x) = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2$

39.6.2 Développement limité d'un produit

Si $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ alors $f(x) = R_n(x) + x^n \varepsilon(n)$, où $R_n(x)$ s'obtient en ne retenant dans $P_n(x)Q_n(x)$ que les termes de degré $\leq n$.

39.6.3 Développement limité d'un quotient

Si $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ alors $f(x) = R_n(x) + x^n \varepsilon(n)$, où $R_n(x)$ s'obtient en effectuant la division $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ selon les puissances *croissantes* de Q_n à l'ordre n.

39.6.4 Développement limité d'une fonction composée

Si $f(x) = f_2\left[f_1(x)\right]$ alors $f(x) = R_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ où R_n est donnée par $Q_n\left(P_n(x)\right)$ dans lequel on ne retient que les monômers de degré $\leq n$.

39.6.5 Développement limité d'une primitive

Soit $f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$. Toute primitive $F(x)$ de $f(x)$ possède un développement limité d'ordre $n-1$ autour de $x = 0$:

$$F(x) = F(0)\int_0^x f(t)\,dt = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_2(x)$$

$$F(x) = Q_{n+1}(x) + x^{n+1}\varepsilon_2(x),\ Q_{n+1}(0) = F(0)$$

Remarque 39.6.1. Le développement limité en $x = 0$ à l'ordre $n-1$ de $f'(x)$ permet d'obtenir le développement limité en $x = 0$ à l'ordre n de $f(x)$.

39.6.6 Développement limité d'une dérivée

Soit f continuement dérivable dans un voisinage de $x = 0$ et admettant un développement limité dans se voisinage.
Si f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en $x = 0$, sa partie régulière s'obtient en dérivant la partie régulière du développement limité de f.

Cinquième partie

Physique

Chapitre 40

Mouvement

La *masse* d'un objet est la quantité de matière contenue dans l'objet.

La *masse volumique* est la densité de masse par unité de volume : c'est la quantité de matière par le volume occupé.

La *vitesse* est parallèle au déplacement, donc tangente à la trajectoire et indique le sens du mouvement. Il est utile d'introduire deux nouveaux vecteurs, l'un tangente à la trajectoir ($\vec{v}_t$), l'autre normal ($\vec{v}_n$).

L'accélération est la manière de laquelle varie la vitesse au cours du temps est donnée par l'accélération. Il est utile d'introduire aussi ici deux nouveaux vecteurs : $\vec{a}_t$, qui donne la variation de la composante v de la vitesse au cours du temps, et $\vec{a}_n$ qui donne la variation de la direction de la vitesse au cours du temps. L'accélération normale est dirigé à l'intérieur d'un virage.

Principe d'inertie : rien n'agit sur un objet en mouvement si son mouvement est rectiligne et uniforme, $\vec{v} = k \ \forall \ t$, $\vec{a} = \vec{0} \ \forall \ t$

40.1 Forces

La deuxième loi de Newton dit que si quelque chose agit sur un objet, alors la vitesse de celui-ci peut être modifiée selon la loi :

$$\sum \overrightarrow{F} = m \cdot \vec{a}$$

La force $\overrightarrow{F}$ est l'influence que subit l'objet (unité de mesure : Newton, $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$).

Le poids d'un objet est la force due à l'attraction terrestre qu'il subit à la surface de la terre :

$$\overrightarrow{F} = m \cdot \vec{g}, \text{ avec } g \approx 9.81 m \cdot s^{-2}$$

La force électrique est la force exercée sur un objet de charge q par un autre objet de charge Q situé à une distance r ; son intensité vaut :

$$F = \frac{6}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q| \cdot |Q|}{r^2}, \text{ avec } \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-10} As \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$$

Les forces de contact sont les forces exercées par traction, par pression par cisaillement. Souvent on peut la décomposer en une somme de deux forces, l'une parallèle à la vitesse, l'autre perpendiculaire. La force de frottement est une force de contact opposée à la vitesse (en général) ; elle agit pour réduire la vitesse :

$$\overrightarrow{F}_f = -\lambda \vec{v}, \text{ où } \lambda \text{ est le coefficient de frottement}$$

La force de traction est une force de contact agissant pour augmenter la vitesse d'un objet :

$$\overrightarrow{F}_{rappel} = -kd \Leftrightarrow \|\overrightarrow{F}\| = k|d|$$

où k est la constante du ressort et $\vec{d}$ est la déformation.
La force de soutien est une force perpendiculaire au mouvement.

Pour pouvoir appliquer la loi de Newton, il faut choisir l'objet (ou l'ensemble des objets dans un système) duquel on veut étudier le mouvement dans un référentiel, puis déterminer toutes les forces exercées sur lui.

Remarque 40.1.1. Pour pouvoir appliquer la loi de Newton, il faut choisir l'objet (ou un système) duquel on veut étudier le mouvement dans un référentiel, puis déterminer toutes les forces exercées sur lui.

40.2 Quantité de mouvement

On définit quantité de mouvement $\vec{P}$ d'un objet comme le produit de sa masse et de sa vitesse :

$$\overrightarrow{P} = m \cdot \overrightarrow{V}$$

La quantité de mouvement d'un système de plusieurs masses est la somme des quantités de mouvement de chaque composant :

$$\overrightarrow{P} = m_1 \cdot \overrightarrow{V}_1 + m_2 \cdot \overrightarrow{V}_2 + \dots$$

La deuxième loi de Newton alors s'écrit :

$$\sum \overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt}$$

Le centre de masse d'un système est défini comme le vecteur position :

$$\vec{r}_{OM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

Alors la quantité de mouvement du système est donné par :

$$\vec{P} = m_1 \cdot \overrightarrow{V}_1 + m_2 \cdot \overrightarrow{V}_2 + \dots = m\overrightarrow{V}_{OM}$$

La quantité de mouvement du système est modifiée uniquement par les forces externes. En absence des forces externes la quantité de mouvement est conservée :

$$\overrightarrow{P} = m_1 \cdot \overrightarrow{V}_1 + m_2 \cdot \overrightarrow{V}_2 + \dots = \overrightarrow{P} = m_1 \cdot \overrightarrow{V}'_1 + m_2 \cdot \overrightarrow{V}'_2 + \dots$$

Chapitre 41

Énergie

41.1 Énergie potentielle de gravitation

Près de la surface de la terre l'énergie potentielle de gravitation vaut (par rapport à une référence) :

$$\boxed{E_{pot} = mgh}$$

Si $h > 0$ la masse se trouve au-dessus de la référence, si $h < 0$ la masse est au-dessous.

Remarque 41.1.1. Seule la variation de l'énergie importe.

41.2 Énergie cinétique

Cette forme d'énergie est liée au mouvement de l'objet :

$$\boxed{E_{cin} = \frac{1}{2}mV^2}, V^2 = \|\overrightarrow{V}\|^2$$

Si l'énergie est conservée :

$$\boxed{E_{cin} + E_{pot} = k}$$

$$\frac{1}{2}mV^2 + mgh = \frac{1}{2}mV_1^2 + mgh_1$$

Remarque 41.2.1. Si la somme de toutes les forces est perpendiculaire à la vitesse, l'énergie cinétique ne change pas !

$dW = \overrightarrow{V} \cdot d\vec{r}$ est le travail de $\overrightarrow{F}$ sur l'objet pendant dt. Le travail total W de $\overrightarrow{F}$ est la somme de toutes les contributions dW.

$$E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) = W_{1\to 2}$$

Si les forces ne travaillent pas $\overrightarrow{V} \cdot d\vec{r} = \vec{0}$ alors l'énergie cinétique est conservée.
Si $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V} = 0$ alors $W = 0$, donc $E_{cin} = k$.
Si $\overrightarrow{F} // \overrightarrow{V}$ et $\|\overrightarrow{F}\| = k = F$ alors, $W = F \cdot l$, $|l|$ = longueur du chemin

$$W_{1\to 2} = -mg(h_2 - h_1) = -mg\Delta h$$

Le travail du poids ne dépend pas du chemin, mais uniquement de la différence des points d'arrivée et de départ.
Si le poids est la seule force exercée sur l'objet, l'énergie cinétique est alors conservée. Une force est

dite conservative si le travail de la force ne dépend pas du chemin, mais seulement de ses extrémités, donc :

$$W_{1\to 2} = Epot(1) - Epot(2)$$

On définit la somme $E_{mc} = E_{cin} + E_{pot}$ comme l'énergie mécanique.
Si toutes les forces exercées sur l'objet sont conservatives (ou ne travaillent pas) alors :

$$Epot(2) = Epot(1)$$

Transmission d'une force par un fil :
- Un fil tendu inextensible et de masse négligeable transmet la force.
- Un fil passe sur un objet et glisse sans frottement ; en absence de frottement le fil glisse sur l'objet et transmet la force, l'objet n'en modifie que la direction.
- Le fil ne glisse pas sur l'objet, donc l'objet s'oppose par inertie à la mise en rotation, mais si l'objet a une masse négligeable, alors il ne faut aucun effort pour mettre en rotation, donc le fil transmet la force.

Chapitre 42

Forces et matière

42.1 La pression

Considérons une surface S d'un objet et une force $\overrightarrow{F}$ exercée sur la surface. On peut décomposer cette force en une force normale et une force tangentielle :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_n + \overrightarrow{F}_t$$

- $\overrightarrow{F}_n$: force normale (compression)
- $\overrightarrow{F}_t$: force tangentielle (déformation)

Le rapport

$$\frac{\|\overrightarrow{F}_n\|}{\delta} = P_{moyenne}$$

est la pression moyenne exercée sur la surface S.

En divisant S en petits morceaux la force peut être vue comme la somme de toutes $\Delta\overrightarrow{F}$. En prenant ΔS infiniment petit, $\Delta\overrightarrow{F}$ est également infiniment petit. On a alors :

$$P = \frac{\|d\overrightarrow{F}_n\|}{dS}, \text{ unité } N \cdot m^{-2} = Pa$$

Si la pression est la même sur toute la surface on a :

$$\boxed{\|\overrightarrow{F}_n\| = F \cdot S}$$

Chapitre 43

Théorie cinématique

43.1 Gaz parfait

Un gaz parfait est décrit par la loi :

$$\boxed{P \cdot V = N \cdot k \cdot T}$$

Où :
p est la pression du gaz ;
V est le volume du gaz ;
N est le nombre de molécules ;
k est une constante ;
T est la température absolue (en Kelvin) ; $T_{absolue} = T_{Celsius} + 273.15$.

Le point de départ est la loi de Newton, avec les hypothèses suivantes :
- Les molécules ne possèdent pas de volume propre ;
- Les molécules n'interagissent pas entre elles ;
- Les chocs des molécules sur les parois sont élastiques : E_{cin} avant $= E_{cin}$ après.

On peut mettre en relation la pression du gaz et l'énergie cinétique moyenne du centre de masse d'une molécule selon la loi :

$$pV = \frac{2}{3}N < \frac{1}{2}mV^2 >$$

43.2 Température et énergie cinématique

43.2.1 CAS 1 : deux gaz mélangés dans une boite

On admettant que les chocs entre les molécules sont élastiques on peut montrer que

$$< \frac{1}{2}m_1V_1 >=< \frac{1}{2}m_2V_2 >$$

Donc les chocs ne modifient pas en moyenne l'énergie cinétique.
Cet équilibre est également entre chacun des gazes et les parois de la boite :

$$< E_{cin\ paroi} >=< \frac{1}{2}m_1V_1 >=< \frac{1}{2}m_2V_2 >$$

43.2.2 CAS 2 : deux gaz séparés dans une boite isolée

Comme à l'équilibre $< E_{cin\ paroi} >=< \frac{1}{2}m_1V_1 >=< \frac{1}{2}m_2V_2 >$, l'énergie cinétique moyenne d'une molécule est la même pour deux gaz à température égale.

Alors nous définissons la température absolue T (unité de mesure : K, Kelvin) d'un gaz par l'énergie cinétique moyenne du centre de masse par la relation :

$$< \frac{1}{2}mV^2 >= \frac{3}{2}kT, k = 1.38 \cdot 10^{-23} JK^{-1} \text{ (constante de Botzmann)}$$

En utilisant la température dans $pV = \frac{2}{3}N < E_{cin} >$ on obtient la loi des gaz parfaits $P \cdot V = N \cdot k \cdot T$.

On exprimant le nombre de molécules N en nombre de moles n [1], $N = nN_o$, on écrit aussi :

$$P \cdot V = N \cdot R \cdot T, R = 8.31 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$$

[1] 1 mole $= N_0 = 6.022 \cdot 10^{23}$ molécules

Chapitre 44

Chaleur

44.1 Premier principe de la thermodynamique

Nous appelons énergie totale (ou énergie unitaire) d'un système toute l'énergie sous toutes les formes contenue dans le système, quel qu'il soit. Elle est notée U.

Exemple 44.1.1. Gaz monoatomique : $U = N < E_{cin} >= N\frac{3}{2}kT$, toute l'énergie est sous forme cinétique ;

Exemple 44.1.2. Ressort avec une masse m : $E_{cin}(m) + E_{pot}(m) + E_{pot}(ressort)$:

On peut modifier l'énergie interne de deux manières :

1. par le travail d'une force exercée sur le système ;
2. par chaleur «donnée» au système.

Par la chaleur, notée Q, nous désignons l'énergie échangée entre le système et son environnement sous une autre forme que le travail (par contact, par rayonnement, ...).

L'énergie interne U d'un système passant d'un état à l'autre est modifié comme :

$$\Delta U = Q + U$$

Convention :

- $Q > 0$: la chaleur est apportée au système ;
- $Q < 0$: la chaleur est libérée par le système.

- $W > 0$: le travail est effectué sur le système ;
- $W < 0$: le travail est fourni par le système.

44.2 Chaleur spécifique

On apportant de la chaleur ($Q > 0$) à un système sa température augmente. La qualité de chaleur à apporter à un système pour modifier la température dépend du système :

$$Q = C\,\Delta T$$

Où C est la chaleur spécifique ou capacité thermique (unité JK^{-1}).

Remarque 44.2.1. si le système est formé de plusieurs parties on a :

$$Q = C_1\Delta T + C_2\Delta T + \ = (C_1 + C_2 +)\Delta T, \text{ ainsi } C = C_1 + C_2 + \dots$$

On définit la *chaleur massique* c indépendante de la masse, telle que $C = cm$. Ainsi :

$$\boxed{Q = cm\Delta T,} \quad \text{avec } c \text{ en } JK^{-1}Kg^{-1}$$

44.3 Chaleur spécifique des liquides et des solides

Une variation de la température s'accompagne d'une variation de volume. Cette variation de volume est faible pur les solides et les liquides. On admet alors $W = 0$, i.e. l'échange d'énergie entre le solide ou le liquide et son environnement se fait uniquement par chaleur : $\Delta U = Q$.

44.4 Chaleur spécifique des gaz

Pour les gaz (qui se dilatent facilement et dont la pression change facilement) on peut imposer des conditions sur les transformation.

Exemple 44.4.1. Volume constant (transformation isochore) : $Q = C_v \Delta T$;

Exemple 44.4.2. Pression constant (transformation isobare) : $Q = C_p \Delta T$;

44.5 Changement d'état

La chaleur nécessaire à une transition de phase dépend de la composition de la matière, de sa quantité et sa masse :

$$\boxed{Q = \lambda m}\ \text{, où } \lambda \text{ est la chaleur latente } (JKg^{-1})$$

Principalement, il y a deux transitions de phase(et la respective chaleur latente) :

- solide $\leftrightarrow$ liquide (λ_f : chaleur latente de fusion ou solidification) ;
- liquide $\leftrightarrow$ gaz (λ_v : chaleur latente de vaporisation ou condensation).

Remarque 44.5.1. Les changements de phase gaz $\rightarrow$ liquide et liquide $\rightarrow$ solide on a $Q < 0$;
Les changements de phase solide $\rightarrow$ liquide et liquide $\rightarrow$ gaz on a $Q > 0$.

Remarque 44.5.2. La température de fusion (ou solidification) et de vaporisation (ou condensation) dépendent de la pression.

Chapitre 45

Description de mouvement cinétique

45.1 Mouvement

Le mouvement est le changement de position avec le temps : la vitesse. De manière générale la position est décrite par une fonction du temps : $s = f(t)$ ou $s = s(t)$.

La vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps. C'est une fonction du temps :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$$

Inversement, si l'on connaît une fonction du temps $f(t)$, on peut chercher une autre fonction $g(t)$, telle que $\dot{g}(t) = f(t)$. Le procédé est appelé intégration.

Si l'objet se trouve au temps t_0 à la position $s(t_0) = s_0$ condition initiale et si l'objet a une vitesse constante $v(t) = t_0 = cte$. Comme

$$\dot{s}(t) = v(t) = v_0$$

$$s(t) = v_0 t + c \quad \text{et} \quad s(t_0) = v_0 t_0 + c = s_0 \Rightarrow c = s_0 - v_0 t_0$$

on peut écrire :

$$s(t) = v_0 t + s_0 - v_0 t_0 = v_0(t - t_0) + s_0$$

La condition initiale $s(t_0) = s_0$ détermine la constante d'intégration.

De même que la vitesse le long de la trajectoire est la dérivée de l'abscisse curviligne $v(t) = \dot{s}(t)$, de même l'accélération tangentielle est la dérivée de la vitesse par rapport au temps : $a(t) = \dot{v}(t)$. On peut également considérer l'accélération comme la dérivée seconde de l'abscisse curviligne : $a(t) = \ddot{s}(t)$.

Ceci est valable aussi à deux dimensions et plus :

$$\begin{aligned}
\vec{s}(t) &= \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{s}_0 \\
\vec{v}(t) &= \dot{s}(t) \\
\vec{a}(t) &= \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)
\end{aligned}$$

45.2 Accélération normale et tangentielle

Considérons un objet parcourant une trajectoire courbe dans deux cas :

1. L'objet ralentit, i.e. v $(t_1) < v(t_0)$ dans le sens du mouvement, $t_1 > t_0$;
   Dans ce cas l'accélération est dirigée ver l'intérieur du virage et possède une composante opposée à la vitesse.

2. L'objet accélère, i.e. v $(t_1) > v(t_0)$ dans le sens du mouvement, $t_1 > t_0$;
   Dans ce cas l'accélération est dirigée ver l'intérieur du virage et possède une composante de même sens que la vitesse.

La composante de l'accélération parallèle à la vitesse est l'accélération tangentielle (la vitesse est toujours tangente à la trajectoire) et la composante de l'accélération perpendiculaire à la vitesse est l'accélération normale. On a donc :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

On a :
- $a_t = \dot{V}$; Attention, ce n'est pas la même chose que $\vec{a} = \overrightarrow{V}$
- $\|\vec{a}_n\| = \frac{V^2}{R}$ où R est le rayon de courbure de la trajectoire.

45.3 Mouvements particuliers

45.3.1 Mouvement rectiligne (la trajectoire est une droite)

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{e}_x \\
\vec{r}(t) &= r(t_0) + x(t)\vec{e}_x \\
\vec{v}(t) &= v_x(t)\vec{e}_x,\ v_x = \dot{x} \\
\vec{a}(t) &= a_x(t)\vec{e}_x,\ \dot{v}_x = \ddot{x}
\end{aligned}$$

45.3.2 Mouvement uniforme

Comme la vitesse est constante, l'abscisse curviligne est donnée par :

$$s(t) = s_0 + v(t - t_0),\ \text{avec } s_0 = s(t_0)$$

Mouvement curviligne uniforme

On a $\vec{v} = v\vec{e}_t$, $a_t = \dot{v} = 0$ et $a_n = \dfrac{V^2}{R}$. On a vu que l'abscisse curviligne est donne par $s(t) = s_0 + v(t - t_0)$, ainsi $s(t) = R(\varphi(t) - \varphi_0)$, donc $\vartheta(t) = \dfrac{V}{R}(t - t_0) + \varphi_0$

Dans le mouvement circulaire uniforme

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{V}{R} = cte,\ \text{où } \dot{\varphi} = \omega \text{est la vitesse angulaire.}$$

ainsi

$$V = R\omega.$$

45.3.3 Mouvement uniformément accéléré

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= \vec{a} = cte \\
\vec{v}(t) &= \vec{a}(t - t_0) + \vec{v}_0 \\
\vec{r}(t) &= \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0
\end{aligned}$$

Chapitre 46

Champ

46.1 Forces (rappel)

Définition 46.1.1. On appelle force toute cause de déformation.

1. **Forces de contact**
   - **Forces de pression**
   $$P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = P \cdot S$$
   (traction ou compression)
   - **Forces de frottement** Soient 2 corps A et B en contact au point C (le tout est en équilibre). On appelle $\overrightarrow{R}_A$ l'action du corps B sur le corps A, $\overrightarrow{R}_A = \overrightarrow{R}_n + \overrightarrow{R}_{tg}$. Par définition $\overrightarrow{R}_{tg}$ est appelé *force de frottement* de A sur B.
   Il existe 2 sortes de frottement : le frottement statique et le frottement dynamique :
   $$F_{max} = \mu \cdot R_n \ , \ F \leq \mu \cdot R_n$$
   Le coefficient μ est appelé coefficient de frottement. Le coefficient de frottement dynamique est plus petit ou égal au coefficient de frottement statique. Il diminue avec la vitesse.
   - **Tension d'un fil** C'est la force qu'il faudrait mettre en un point A d'un fil pour que le mouvement ne soit pas altéré.
2. **Forces à distance**
   - **Forces de gravitation** Soit un système isolé constitué de 2 masses m_1 et m_2. On a :
   $$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$
   où G est la constante de gravitation universelle, et d la distance entre les deux masses.
   - **Forces électrostatiques (Loi de Coulomb)** Soient q_1 et q_2 2 charges électriques ; on a :
   $$F = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{d^2}$$

46.2 Potentiel gravifique

46.2.1 Énergie potentielle de gravitation

On appelle énergie potentielle de gravitation en un point $A(r)$ le travail nécessaire pour emmener la masse d'épreuve m de ce point A au point de référence O

Le travail nécessaire pour emmener une masse m du point A (r) au point O (∞) vaut :

$$W = -G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r}$$

46.2.2 Champ de gravitation

On appelle potentiel de gravitation V le rapport de l'énergie potentielle de gravitation sur la masse m :

$$\begin{aligned} W &= E_{pot} = -G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r} \\ V = \frac{W}{m} &= -G \cdot M \cdot \frac{1}{r} = E_{pot} \quad [J \cdot Kg^{-1}] \end{aligned}$$

46.3 Potentiel électrostatique

46.3.1 Énergie potentielle électrique

On appelle énergie potentielle électrique en un point $A(r)$ le travail nécessaire pour emmener une charge de ce point A au point de référence O :

$$F = k \cdot \frac{|q| \cdot |Q|}{d^2}$$

On appelle potentiel électrique V en un point $A(r)$ le rapport d'énergie électrique sur la charge d'épreuve considéré :

$$E = \frac{W}{q} = k \cdot Q \cdot \frac{1}{r}$$

où E est le champs électronique.

46.4 Définition de champ de gravitation

Soit une planète de masse M. On appelle champ de gravitation ou champ gravifique toute région de l'espace où une masse m est soumise à une force $\overrightarrow{F}$ (force de gravitation) telle que $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{E}$, où $\overrightarrow{E}$ est le vecteur champ de gravitation au point considéré.
Le vecteur $\overrightarrow{E}$ dépend de la position telle que

$$E = G \cdot M \cdot \frac{1}{r^2}$$

Autour de toute masse M il existe un champ de gravitation.

46.5 Champ électrostatique

On appelle champ électrostatique toute région de l'espace où une charge électrique est soumise à une force électrique $\overrightarrow{F}$ telle que $\overrightarrow{F} = q \cdot \overrightarrow{E}$.
Si la charge de base (Q) est positive alors le vecteur champ électrique est dirigé vers l'extérieur.
Si la charge de base (Q) est négative alors le vecteur champ électrique est dirigé vers l'intérieur.

Dans tous les cas :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} &= q \cdot \overrightarrow{E} \\ F &= \frac{k \cdot |Q| \cdot |q|}{r^2} \\ E &= k \cdot \frac{|Q|}{r^2}\end{aligned}$$

46.6 Topographie de quelques champs particuliers

1. **Champ de gravitation**
   - **Champ uniforme**
     L'énergie est uniforme.
   - **Champ radial**
     On appelle ligne de champ toute ligne qui est tangente en chacun de ces points au vecteur champ en ce point.
     Les lignes de champ sont des droites issues de l'origine. Pour les champs uniformes, les lignes de champ sont parallèles.
2. **Champ électrostatique**
   - **Champ uniforme**
     Les lignes de champ sont des droites parallèles et le vecteur champ est le même partout (on rencontre cette situation dans un condensateur plan).
   - **Champs radial**
     C'est un champ associé à une charge ponctuelle. (Si on a une sphère chargée, elle se comporte comme si toute sa charge était concentrée dans son centre de masse).

46.7 Champ de force dérivant d'un potentiel

On dit qu'un champ dérive d'un potentiel lorsque le travail de la force entre deux points ne dépend pas du chemin entre ces deux point. Il ne dépend que du point de départ et d'arrivée.

Exemples :
- champ de gravitation ;
- champ de force associé à une charge ponctuelle ;
- champ de force du type $F = -kx$ (ressort linéaire).

Champ de gravitation	**Champ électrostatique**
$\overrightarrow{E}_G = \frac{Force}{masse}$	$\overrightarrow{E}_G = \frac{Force}{charge}$
$\vec{g} = \frac{\vec{p}}{m}$	$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$

On peut définir une énergie potentielle de position par la relation

$$A = -\Delta W_p = W_{p_1} - W_{p_2}$$

W_p n'est défini qu'à une constante additive près.
Le choix de l'origine ($W_p = 0$) est arbitraire.

Si le champ dérive d'un potentiel, l'énergie potentielle a la même valeur en tous les points d'une même surface.

Si l'on parcours les lignes de champ dans le sens du champ ($+ \rightarrow -$) W_p diminue lorsqu'on passe d'une surface équipotentielle à la suivante.

46.8 Tableau récapitulatif

	Gravitation	**Électrostatique**
Force	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$	$F = k\frac{\|q_1\|\|q_2\|}{x^2}$
Champ	$E = \frac{F}{m_2} = G\frac{m_1}{r^2} = G\frac{m}{r^2}$	$E = \frac{F}{\|q_2\|} = k\frac{\|q_1\|}{x^2} = G\frac{\|q\|}{x^2}$
Énergie potentielle	$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$	$E_p = k\frac{q_1 q_2}{x}$
Potentiel	$V = -G\frac{m}{r}$	$V = k\frac{q}{x}$

Chapitre 47

Moment d'une force

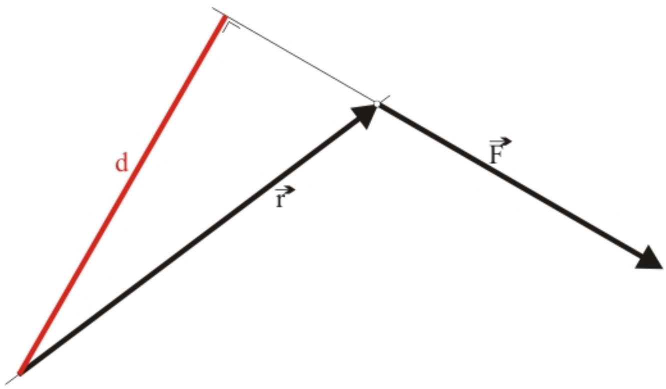
47.1 Moment d'une force

Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ par rapport à une origine O est donné par :

$$\boxed{\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}_{(\overrightarrow{F}/O)} = \vec{r} \times \overrightarrow{F}}$$

où $\vec{r}$ est le vecteur position.
Un système est en équilibre ssi :
- $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$;
- $\sum \overrightarrow{M}_{/O} = \overrightarrow{0}$: la somme des moments par rapport à un point quelconque est nulle.

Remarque 47.1.1. $\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \overrightarrow{F}$, donc $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot d$, où d est le *bras de levier* :



47.2 Poussée d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide (liquide ou gaz) reçoit de la part de ce dernier une force de poussée verticale dirigée vers le haut.
Le module de cette force équivaut au poids du volume du fluide déplacé :

$$\boxed{P_{arch} = V \cdot \rho_{liquide} \cdot g}$$

Le point d'application de cette force est le centre de gravité du fluide déplacé.

Chapitre 48

Le moment cinétique

Définition 48.0.1. On appelle moment cinétique le vecteurs $\overrightarrow{L}$ tel que :

$$\overrightarrow{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\overrightarrow{V}$$

$$\boxed{L = \|\overrightarrow{L}\| = r \cdot mv \cdot \sin\alpha [m^2 kg s^{-1}]}$$

La dérivée du moment cinétique par rapport au temps est égale au moment de la force appliquée sur le mobile :

$$\dot{\overrightarrow{L}} = \vec{r} \cdot \overrightarrow{F} = \overrightarrow{M}_{(\overrightarrow{F}/O)}$$

48.1 Moment cinétique et force centrale

Définition 48.1.1. Une force est dite centrale lorsqu'elle est constamment dirigée vers un point de référence O.

Le moment cinétique d'une force centrale est constant.

48.2 Lois de Kepler

1. Les trajectoires des planètes autour du soleil sont des ellipses, et le soleil est un foyer ;
2. L'aire balayée par le rayon-vecteur (soleil-planète) est proportionnelle au temps ;
3. Le carré des temps de révolution est proportionnel au cube du grand-axe.

Chapitre 49

Le moment d'inertie

Soit un corps solide S indéformable tournant à la vitesse angulaire ω autour d'un axe Δ. π est un plan perpendiculaire à Δ. On a :

$$\overrightarrow{M}_{F_i/O} = \overrightarrow{M}_i = \vec{r}_i \times \overrightarrow{F}_{i_{tg}}$$

et

$$M_i = r_i\, F_{i_{tg}} = r_i\, m_i \frac{d(\omega r_i)}{dt} = m_i\, r_i^2\, \frac{d\omega}{dt} = m_i\, r_i^2\, \ddot{\theta}$$

Le point commun à toutes les particules de solides sont ω et θ.
Pour l'ensemble des particules du système on a :

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2\, \ddot{\theta} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2\right) \ddot{\theta} = I_\Delta\, \ddot{\theta}$$

C'est le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ.

49.1 Quelques moments d'inertie

- Cylindre creux par rapport a son axe dy symétrie : $I_\Delta = mR^2$;
- Cylindre plein par rapport a son axe dy symétrie : $I_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$;
- Anneau de rayon r : $I_\Delta = mR^2$;
- Sphère pleine par rapport à un axe diamétral : $I_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$.

49.2 Relation fondamentale de la dynamique d'un corps solide indéformable en rotation

$$\boxed{M = I\ddot{\theta}}$$

Remarque 49.2.1. Un moment d'inertie qui aide la rotation est affecté du signe + ;
Un moment d'inertie qui s'oppose à la rotation est affecté du signe -.

Remarque 49.2.2 *(Équation de liaison).* Parfois pour résoudre un problème il faut un'équation de liaison entre la translation et la rotation :

$$\boxed{a = R \cdot \ddot{\theta}}$$

49.3 Théorème de Steiner

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + md^2$$

avec m la masse du solide et d la distance entre Δ et Δ'.

49.4 Aspect énergétique

L'énergie cinétique totale d'un corps en rotation est donné par :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad [J]$$

Chapitre 50

Hydrostatique

50.1 Cas des liquides

50.1.1 Principe fondamental

Dans un liquide en équilibre tous les points d'un même plan horizontal sont à la même pression.

50.1.2 Expression de la pression en fonction de la hauteur

Soient P_A et P_B la pression au point A et au point B, x la distance verticale entre A et B, ΔP la différence des deux pressions et S la section du cylindre de liquide considéré. On a :

$$\begin{array}{rcl} P_A & = & P_{atm} + \dfrac{mg}{S} = P_{atm} + \dfrac{V\rho g}{S} = P_{atm} + \dfrac{Sh\rho g}{S} = P_{atm} + \rho g h \\ P_B & = & P_{atm} + \rho g(h+x) \\ \Delta P & = & P_B - P_A = \rho g(h+x) - \rho g h = \rho g x \end{array}$$

50.2 Théorème de Pascal

Théorème 50.2.1. *Les liquides transmettent intégralement les variations de pression.*

Chapitre 51

Tension, potentiel et flux

51.1 Tension

51.1.1 Définition

Soient A et B deux points d'un champ électrique situés sur une courbe c. On subdivise le chemin AB en une multitude de chemin élémentaires de type A_i, A_{i+1}.

On appelle *tension élémentaire* ΔU_i entre A_i et A_{i+1} la quantité $\Delta U_i = \overrightarrow{E}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$

La tension U_{AB} entre les points A et B :

$$U_{AB} = \Sigma U_i = \Sigma \overrightarrow{E}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_A^B \overrightarrow{E} \cdot d\vec{r} \quad [Volt]$$

Cas particulier

Tension dans un champ uniforme :

$$\boxed{U_{AB} = E \cdot AB}$$

51.1.2 Propriétés

- $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$
- $U_{AB} = -U_{BA}$

51.1.3 Tensions circulaires

Soit une courbe fermée dans un champ électrique.
Dans tout champ électrique associé à une charge les tensions circulaires sont nulles.

51.1.4 Travail d'un champ électrique

Le travail effectué par un champ électrique est donné par $W = q \cdot U$.

51.2 Potentiel

Dans un champ où les tensions sont indépendants des chemins parcouru le potentiel en un point est la tension entre ce point et un point de référence (pris à l'infini). Soit V_P le potentiel d'un point

P d'un champ électrostatique. Soit V_Q le potentiel au point Q.
La tension entre P et Q c'est la différence de potentiel entre P et Q :

$$V_P - V_Q = U_{PQ}$$

51.3 Flux

On appelle *flux* élémentaire à travers la surface élémentaire ds la quantité

$$d\varphi = \overrightarrow{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds$$

Le flux total à travers la surface S est donné par

$$\varphi = \Sigma d\varphi_i = \int_{\varepsilon} \overrightarrow{E} \cdot d\vec{s}$$

Théorème 51.3.1. *Le flux total à travers une surface fermée vaut*

$$\varphi = \frac{\Sigma_{i=1}^{n}}{\varphi \quad _i} \varepsilon_0, \text{ avec } \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9}$$

Chapitre 52

Condensateurs

52.1 Définition

On appelle *condensateur* la donnée de deux conducteurs isolés et en influence totale. Les deux conducteurs sont appelés *armatures* : l'une porte la charge positive $+Q$ et l'autre la charge négative $-Q$.

On considérera que trois types de condensateur :

Condensateur plan : les lignes de champs sont des droites parallèles et le champ électrique est le même partout.

Condensateur sphérique : les lignes de champs sont de nature radiale.

Condensateur cylindrique : dans un plan horizontal les lignes de champ sont radiales.

Définition 52.1.1. On appelle *diélectrique* une substance que l'on introduit entre les armatures et dont la propriété est de modifier la capacité du condensateur.

52.2 Capacité d'un condensateur

52.2.1 Définition

Soient Q la charge d'un condensateur et U la différence de potentiel (ddp) entre les armatures du condensateur. Alors Q et U sont liées par la relation

$$\boxed{Q = C \cdot U} \ [\text{Farad} = \text{Coulomb} \cdot \text{Volt}]$$

52.2.2 Capacités de certains condensateurs

Capacité d'un condensateur plan : $C = \varepsilon_0 \cdot \dfrac{S}{d}$

Capacité d'un condensateur sphérique : $C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$

La capacité d'une sphère chargée (condensateur sphérique de rayon $R = R_1$ avec $R \to \infty$) vaut $4\pi\varepsilon_0 R$

Capacité d'un condensateur cylindrique : $C = 2\pi\varepsilon_0 L \dfrac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$

52.3 Groupement de condensateurs

52.3.1 Groupement en série

Soit un groupement de n condensateurs en série. Les condensateurs possèdent tous la même charge Q. Le condensateur équivalent possède la charge Q, sa tension est U et sa capacité C On a :

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=i}^{n} \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

52.3.2 Groupement en parallèl

Soit un groupement de n condensateurs en parallèl. Les condensateurs sont au même potentiel U. On a :

$$\boxed{C = \sum_{i=i}^{n} C_i = C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$$

52.4 Groupement mixte

Lorsqu'on a affaire à un montage mixte (série et parallèle) on commence à rechercher l'équivalent de chaque série, ensuite l'équivalent du montage parallèl.

Remarque 52.4.1. Dans un groupement en série Q est la même.
Dans un groupement en parallèle U est la même.

Chapitre 53

Circuits

53.1 Résistance morte

On appelle *résistance morte* un conducteur ou un appareil dans lequel toute l'énergie électrique reçue est transformée en chaleur.

La résistance d'un conducteur de section S et te longueur L vaut

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

avec ρ la résistivité du conducteur.

ρ dépend de la nature du condensateur et de la température et $\rho = \rho_0(1 + at)$, où ρ_0 est la résistivité à la température $t = 0C$ et a le coefficient caractérisant la matière du conducteur.

La ddp aux bornes d'une résistance vaut

$$\boxed{U = R \cdot i} \; [V = \Omega \cdot A]$$

De plus on a :

$$W = R \cdot i^2 \cdot t \quad [J]$$

et

$$P = \frac{W}{t} = R \cdot i^2$$

53.2 Association de résistances

53.2.1 Association en série

$$U = R_e \cdot i, \text{ avec } R_e = \sum R_i$$

53.2.2 Association en parallèl

$$U = R_e \cdot i, \text{ avec } \frac{1}{R_e} = \sum \frac{1}{R_i}$$

53.3 Générateur

On appelle *générateur* un appareil électrique qui produit de l'énergie électrique, en consomme une partie par effet Joule (Ri^2) et qui fourni l'autre partie à l'extérieur.

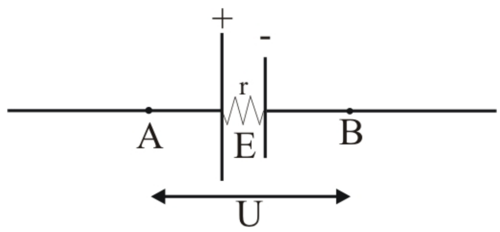
Rappel

$$\boxed{\text{Loi } \Omega : U = Ri}$$
$$\boxed{\text{Effet Joule} : P = Ri^2}$$

Tout générateur se caractérise par deux paramètres qui sont sa résistance interne r et sa force électromotrice ou tension électromotrice E.

Soit P_t la puissance totale produite par le générateur, P_i la puissance consommée par effet Joule et P_e la puissance qui fourni au circuit extérieur. On a

$$P_t = P_e + P_i, \quad \text{avec } P_e = UI \text{ et } P_i = ri^2$$



53.3.1 Expression de la force électromotrice

Soit P_t la puissance totale produite par un générateur, P_i la puissance consommée par effet Joule et P_e la puissance qui fourni au circuit extérieur. On a

$$P_t = P_e + P_i = UI + rI^2 \Leftrightarrow U = \frac{P_t}{I} - rI$$

Or $\frac{P_t}{I} = E$ (force électromotrice), d'où

$$\boxed{U = E - rI}$$

rI est appelée *chute Ohmique de tension* ou *chute Ohmique de potentiel.*
Remarque 53.3.1. Si le générateur est ouvert (débranché) on a $I = 0$, d'où $U = E$.

53.3.2 Rendement d'un générateur

Le rendement ρ est donné par

$$\boxed{\rho = \frac{P_e}{P_t} = \frac{UI}{U + rI} = \frac{U}{E}}$$

53.4 Récepteur

53.4.1 Définition

On appelle *récepteur* tout appareil électronique qui reçoit une certaine puissance électronique P_t, en consomme une partie P_i par effet Joule et transforme la différence P' en autre forme d'énergie : $P_t = P' + P_i$.

53.4.2 Caractéristiques d'un récepteur

Un récepteur est caractérisé par deux paramètres : sa résistance interne r' et sa force ou tension contre-électromotrice (fcem).

$$U = E' + r'I, \text{ avec } E' = \frac{P'}{I}$$

53.4.3 Rendement

Le rendement ρ est donné par

$$\rho = \frac{P'}{P_t} = \frac{E'}{U}$$

53.4.4 Moteur calé

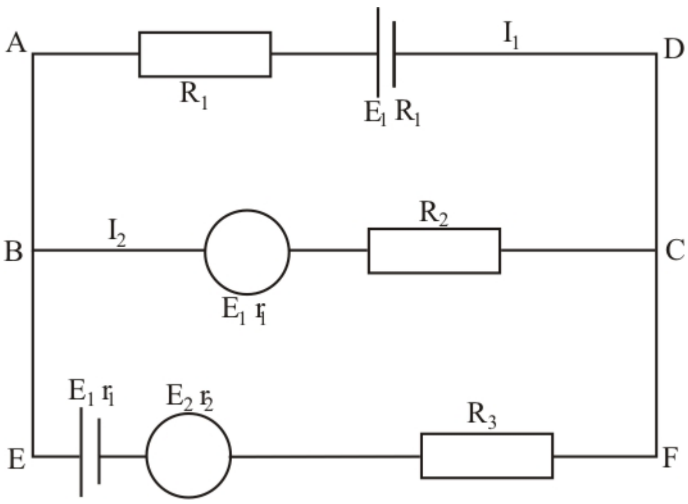
C'est un récepteur qui est empêché de fournir une puissance mécanique.

$$U = E' + r'I$$

Or $E' = 0$, d'où $I = \dfrac{U}{r'}$.

53.5 Loi de Kirchoff

Considérons un circuit électronique renfermant des générateurs, des récepteurs et des résistances mortes.



Les points $A, B, \ldots$ sont appelés *noeuds*.
Les boucles de type $ABCD$, $AEFD$, $BEFC$ sont appelées *mailles*.

53.5.1 Loi des noeuds

La somme des courantes qui entre dans un noeud est égale à la somme des courantes qui en sort.

53.5.2 Loi des mailles

Pour toute maille on a la relation $\sum E - \sum E' = \sum R_i$.

53.6 Association de générateurs

53.6.1 Association en série

Les générateurs sont disposés de telle sorte que le pôle positive de l'un est relié au pôle négative de l'autre.
Le générateur équivalent a les caractéristiques suivantes :

$$\boxed{r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n}$$

Remarque 53.6.1. Si deux générateurs sont en série mais en opposition le générateur de plus grande fem joue le rôle de générateur et celui de plus faible fem joue le rôle de récepteur.

53.6.2 Association en parallèle

Le générateur équivalent a les caractéristiques suivantes :

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}}$$

Chapitre 54

Magnétisme et Électromagnétisme

On appelle *champ magnétique* toute région de l'espace où une boussole est soumise à une couple de forces.

on chaque point du champ magnétique on définit le vecteur champ magnétique $\overrightarrow{B}$.

54.1 Champ magnétique et courants

Tout courant électrique est associé à un champ magnétique.

54.1.1 Courant rectiligne

Si on saupoudre un plan avec de la limaille de fer et en envoi le courant dans le fil. On constate que les grains de limaille de fer occupent des cercles concentriques : ce sont les lignes de champ.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{d}, \text{ avec } \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$$

Remarque 54.1.1. Le sens de $\overrightarrow{B}$ est donné par la règle du bonhomme d'ampère : le courant entre par ses pieds et sorte par la tête et regarde le point M. $\overrightarrow{B}$ est dirigé vers sa gauche.

54.1.2 Courant circulaire

Le champ au centre de la spire vaut

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{r}}$$

54.1.3 Courant dans un solénoïde

À l'intérieur le champ est quasi uniforme et vaut $B = \mu_0 ni$, avec $n = \dfrac{N}{l}$, où N est le nombre de spires e l la longueur du solénoïde.

54.2 Loi d'Ampère

Soient γ une courbe fermée enlaçant plusieurs courants i_1, i_2, ... On appelle circulation du vecteur $\overrightarrow{B}$

$$\int_\gamma \overrightarrow{B}\, d\vec{r} = \mu_0 \sum i$$

54.3 Action mutuelle de deux courant

Soient deux fils parallèles.
Soit un élément de courant $d\vec{l}$ (i l'intensité de courant qui le traverse) plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, alors l'élément de courant $d\vec{l}$ est soumis à la force $d\vec{f}$ dite force de Laplace tel que

$$d\vec{f} = i(d\vec{l} \times \overrightarrow{B})$$

Si le conducteur a une longueur l alors l'expression devient

$$\overrightarrow{F} = i(\vec{l} \times \overrightarrow{B})$$

Si i_1 et i_2 sont de même sens alors $\overrightarrow{F}_1 = \overrightarrow{F}_2$, sinon $\overrightarrow{F}_1$ et $\overrightarrow{F}_2$ sont répulsives.

Définition 54.3.1 (Ampère). L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui circulant dans deux fils parallèles de longueur très grande induirait une force attractive ou répulsive entre les deux conducteurs, de module $2 \cdot 10^{-7}$.

54.4 Loi de Lorentz

Soit une particule chargée q et de masse m lancée à la vitesse V dans un champ magnétique. Alors la particule est soumise à la force $\overrightarrow{F}$ tel que

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{B})}$$

Sixième partie

Chimie

Chapitre 55

Les liaisons chimiques

55.1 Électronégativité

L'électronégativité est un nombre qui mesure la tendance d'un atome è capturer un électron. Si la différence d'électronégativité est grande les atomes échangent facilement des électrons. Si cette différence est plus grande que 1.7, on est certain d'avoir une formation d'ions puis de molécule, on parle alors de **liaison ionique**.

Remarque 55.1.1. Les liaisons ioniques se cassent dans l'eau.

On a 3 types de liaisons :

1. **liaisons ioniques**;
2. **liaisons covalentes** : chacun des deux atomes accepte de mettre en commun un électron;
3. **liaisons coordinantes ou liaisons datives ou de coordination** : un atome accepte que deux de ces électrons soient «partagés» avec un autre atome.

55.2 Nombre d'oxydation (N.O.) et valence

Le nombre d'oxydation (N.O.) est la charge qui s'est rapprochée de l'atome.
Le N.O. d'un atome dans une molécule correspond, en valeur absolue, au «nombre de traits» qui partent de l'atome. Dans une molécule la somme des N.O. vaut 0.

Une molécule dans laquelle apparaissent des zones positives et négatives est une molécule polaire.
La valence d'un atome dans une molécule est le nombre de traits qui partent de l'atome. Donc, *en général* :

$$\textbf{Valence} = |\textbf{N.O.}|$$

Exemple 55.2.1. La valence de l'oxygène dans O_2 vaut 2, mais $|\text{N.O.}| = 0$

55.3 Technique pour dessiner les formules développés

1. On cherche à trouver les N.O. de chaque atome dans la molécule, ce qui permet de connaître le nombre de traits (= valence) qui partent de chaque atome.
2. On unit les atomes faisant se joindre les traits dessinés;
   (a) en essayant de ne pas lier ensemble des atomes identiques
   (b) en essayant de ne pas faire de cycles fermés.

Remarque 55.3.1. Le carbone est une exception.

55.4 Nomenclature des composés binaires

55.4.1 Ordre de notation de la formule brute

métal, hydrogène, non-métal, oxygène

55.4.2 Préfixes numéraux

1 : mono	2 : di	3 : tri	4 : tétra	5 : penta
6 : hexa	7 : hepta	8 : octa	9 : nona	10 : déca

55.4.3 Noms

Le nom (en français), est indiqué dans l'ordre inverse de la formule.

- **Composés oxygénés (oxydes)**

  *(préfixe numéral)***oxyde** de **métal**

- **Composés hydrogénés**

  acide non-métal**hydrique**

- **Composés hydrogénés en chaîne** :

  *(préfixe numéral)*non-métal**ane**

  Remarque 55.4.1. le soufre donne un sulfure, l'azote un nitrure, le carbone un carbure

- **Autres composés** :

  *(préfixe numéral)*non-métal**ure** de **métal**

  Lorsque un élément peut prendre deux états d'oxydation, on peut les différencier par les suffixes **eux** (petite valence) et **ique** (grande valence).
  S'il existe 4 valences on ajoute les préfixes **hypo** (valence très petite) et **per** (valence très grande).
  Dans les autres cas il faut connaître le corps de référence qui prend la terminaison *ique* et en déduire les noms des autres composés[1].

Remarque 55.4.2. si le préfixe numéral est inutile, on ne l'indique pas.

Remarque 55.4.3. Si l'indice du premier élément vaut 2, on utilise le préfixe **hémi**.

Remarque 55.4.4. Lorsque les indices du premier élément est 2 et celui du second 3, on utilise le préfixe **sesqui**.

Cas particuliers :
- H_20 : eau
- H_2O_2 : eau oxygénée (peroxyde d'hydrogène)
- NH_3 : ammoniac
- O_3 : ozone

[1] *Azote* : acide nitrique (HNO_3) ;
Bore : acide bromique (H_3B) ;
Brome : acide bromique ($HBrO_3$) ;
Chlore : acide chlorique ($HClO_3$), acide chlorhydrique (HCl) ;
Chrome : acide chromique (H_3AsO_4) ;
Iode : acide iodique (HIO_3) ;
Phosphore : acide phosphorique (H_3PO_4) ;
Soufre : acide sulfurique (H_2SO_4).

55.5 Nomenclature des composés ternaires

$$\underbrace{\begin{array}{cc} \text{Métal} & \\ \downarrow +O_2 & \downarrow +O_2 \\ \text{Oxyde de métal} & \text{Oxyde de non-métal} \\ \downarrow +H_2O & \downarrow +H_2O \\ \text{Hydroxyde - }(\ldots)OH & \text{Acide -}H(\ldots) \end{array}}_{\text{Sel (+ eau)}}$$

On peut, à partir d'un terme de droite et un terme de gauche, former un sel.

55.5.1 Noms

- **Acides (oxacides)**
  formule : H, non-métal, O
  nom : **acide** non-métal**ique**
- **Hydroxydes**
  formule : métal, OH
  nom : **hydroxyde** de métal (ex. : $Fe(OH)_3$: hydroxyde de fer III / ferrique)
- **Sels**
  formule : métal (provenant de l'hydroxyde), non-métal (provenant de l'acide)
  nom : *(préfix)*non-métal*(terminaison)* de métal

  Les acides en **eux** donnent des sels en **ite** ;
  Les acides en **ique** donnent des sels en **ate**.

Pour les **hydrogéno-sels** (sels formés à partir d'un acide qui n'a pas perdu tous ses hydrogènes) on ajoute le préfixe **hydrogéno**.

Chapitre 56

Les solutions

Définition 56.0.1. On appelle solution la donnée sous forme de mélange de deux substances, l'une appelée le *solvant* et l'autre appelée le *soluté*. Le soluté se dissous dans le solvant.

56.1 Concentration

Définition 56.1.1. Soit V le volume d'une certaine solution (solvant + soluté). On appelle *concentration* de cette solution la quantité $C = \frac{q}{V}$, où V est le volume de la solution, et q la quantité de soluté.
q peut s'exprimer en grammes, moles, équivalents-grammes, ...
V peut s'exprimer en ml, l, m^3, ...

On ne considérera que trois types de concentration :

- **Molarité**
  Définition 56.1.2. On appelle molarité d'une solution le nombre de moles de soluté par litre de solutions :
  $$M = \frac{n}{V} = \frac{\frac{masse}{moles}}{Volume}$$
- **Normalité**
  Définition 56.1.3. L'équivalent-gramme est la masse capable de libérer une charge (un ion-gramme H^+ pour les acides ou un ion-gramme OH^- pour les bases) :
  $$1\text{éq-gramme} = \frac{mole}{"charge"}$$
  Définition 56.1.4. On appelle normalité d'une solution ou concentration normale le nombre d'équivalent-grammes de soluté par litre de solution :
  $$N = \frac{\frac{mole}{"charge"}}{Volume}$$
- **Titre**
  Définition 56.1.5. On appelle titre d'une solution le rapport entre la masse de soluté exprimé en grammes au volume de solution exprimé en ml.

56.2 Neutralisation totale

$$Acide + Base \rightarrow Sel + H_2O$$

1 équivalent-gramme d'acide neutralise totalement 1 équivalent-gramme de base.

Soient 2 solutions aqueuses, l'une acide et l'autre basique. A neutralisation totale on aura

$$n_a V_a = n_b V_b$$

Chapitre 57

Équilibre chimique

Définition 57.0.1. On appelle *réaction réversible* si elle peut s'effectuer dans les deux sens ; si l'on peut effectuer seulement dans un sens est dite *réaction irréversible.*

Définition 57.0.2. Une réaction chimique qui dégage de l'énergie (chaleur) est dite *exothermique.* Si elle absorbe de la chaleur est dite *endothermique.*
Une réaction est *athermique* lorsqu'elle ne dégage pas ni elle absorbe pas de l'énergie.

57.1 Loi d'action de masse ou loi de Goldberg et Wange

Soit une réaction réversible :

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \leftrightarrows \beta_1 b_1 + \beta_2 + b_2 + \cdots$$

On appelle *vitesse de réaction* de la réaction $\rightarrow$ le nombre de particules de gauche qui réagissent par unité de temps :

$$V_1 = k_1 [a_1]^{\alpha_1} [a_2]^{\alpha_2}$$

où k_1 est une constante dépendant de la nature des produits réactifs et de la température.

De même pour la réaction $\leftarrow$.

Remarque 57.1.1. La vitesse de réaction concerne aussi les réactions irréversibles. Dans ce cas il y a seulement une vitesse de réaction.

57.1.1 Loi d'action de masse

Nous sommes dans une situation de réaction réversible. On a équilibre chimique lorsque $V_1 = V_2$. On a :

$$k = \frac{k_1}{k_2} = \frac{[b_1]^{\beta_1} [b_2]^{\beta_2}}{[a_1]^{\alpha_1} [a_2]^{\alpha_2}}$$

k est appelée constante d'équilibre.
k ne dépend que de la température.

57.2 Principe ou loi de Chatelier

Proposition 57.2.1. *Toute variation d'un des paramètres (T, P, $[]$) tend a déplacer l'équilibre dans le sens qui s'oppose à cette variation.*

Influence de la température : Une augmentation de la température déplace l'équilibre vers le sens endothermique (absorbe énergie) ;
une diminution de la température déplace l'équilibre vers le sens exothermique (dégage énergie).

Influence de la pression (phases gazeuses) : Une augmentation de pression déplace l'équilibre dans le sens de volume minimum ;
Une diminution de pression déplace l'équilibre dans le sens de volume maximum.

Influence de la concentration : Une augmentation de la concentration de l'élément de gauche favorise la réaction dans le sens gauche $\rightarrow$ droite.
Une diminution de la concentration de l'élément de gauche favorise la réaction dans le sens droite $\rightarrow$ gauche.

Une augmentation de la concentration de l'élément de droite favorise la réaction dans le sens droite $\rightarrow$ gauche.
Une diminution de la concentration de l'élément de droite favorise la réaction dans le sens gauche $\rightarrow$ droite.

Présence d'un catalyseur : Le catalyseur est sans effet sur l'équilibre.

57.3 Constante d'équilibre en fonction des pressions partielles

Notation : k ou k_c est la constante d'équilibre en fonction des concentrations ; k_p est la constante d'équilibre en fonction des pressions partielles.

La constante d'équilibre en fonction des pression partielles est donnée par :

$$k_p = \frac{P_{b_1}^{\beta_1} \cdot P_{b_2}^{\beta_2} \cdots}{P_{a_1}^{\alpha_1} \cdot P_{a_2}^{\alpha_2} \cdots}$$

Relation entre k_p et k_c

$$\begin{aligned}
k_c &= \frac{[b_1]^{\beta_1}[b_2]^{\beta_2}}{[a_1]^{\alpha_1}[a_2]^{\alpha_2}} = \\
&= \frac{\left(\frac{n_1'}{V}\right)^{\beta_1} \cdot \left(\frac{n_2'}{V}\right)^{\beta_2} \cdots}{\left(\frac{n_1}{V}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{n_2}{V}\right)^{\alpha_2} \cdots} \qquad [n = (n_1 + n_1') + (n_2 + n_2') + \cdots] \\
&= \frac{\left(\frac{n_1'}{n} \cdot \frac{n}{V}\right)^{\beta_1} \cdot \left(\frac{n_2'}{n} \cdot \frac{n}{V}\right)^{\beta_2} \cdots}{\left(\frac{n_1}{n} \cdot \frac{n}{V}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{n_2}{n} \cdot \frac{n}{V}\right)^{\alpha_2} \cdots} = \qquad \left[\frac{n}{V} = \frac{P}{RT}\right] \\
&= \frac{\left(\frac{n_1'}{n} \cdot \frac{P}{RT}\right)^{\beta_1} \cdot \left(\frac{n_2'}{n} \cdot \frac{P}{RT}\right)^{\beta_2} \cdots}{\left(\frac{n_1}{n} \cdot \frac{P}{RT}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{n_2}{n} \cdot \frac{P}{RT}\right)^{\alpha_2} \cdots} = \\
&= \frac{\left(P_{b_1}'\right)^{\beta_1} \cdot \left(P_{b_2}'\right)^{\beta_2} \cdots}{\left(P_{a_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(P_{a_2}\right)^{\alpha_2} \cdots} \cdot \frac{\left(\frac{1}{RT}\right)^{\beta_1+\beta_2+\cdots}}{\left(\frac{1}{RT}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots}} = \\
&= k_p \cdot \left(\frac{1}{RT}\right)^{\beta_1+\beta_2+\cdots-\alpha_1-\alpha_2-\cdots}
\end{aligned}$$

Chapitre 58

Notion de pH

58.1 Rappels

Acide : substance capable de libérer un ou plusieurs ions H^+ ;
Base : substance capable d'accepter un ou plusieurs ions H^+.

A toute acide correspond une base et vice-versa ; on parle alors de couple acide-base conjugué.

$$HCl + H_2O \to H_3O^+ + OH^-$$

couples acide-base : HCl/Cl^- et H_3O^+/H_2O.

Remarque 58.1.1. L'eau possède un caractère enphotère (joue le rôle d'un acide ou une base).

58.2 Produits ioniques de l'eau

L'eau est très faiblement dissociée, donc $[H_2O] = cte$, donc $[H_2O]^2 = cte$;
d'où $[H_3O^+] \cdot [OH^-] = cte = k_e$ (constante du produit ionique).
Dans les conditions normales $k_e = 10^{-14}$. Donc $[H_3O^+] \cdot [OH^-] = 10^{-14}$.

58.3 pH

Définition 58.3.1. On appelle pH d'une solution la quantité

$$pH = -\log \left[H^+\right]$$

donc

$$[H^+] = 10^{-pH}$$

58.3.1 pH dans les acides fortes

Dans les acides fortes on a

$$[Acide] = [H^+] = N_a = \frac{\frac{mole}{\text{"}charge\text{"}}}{Volume}$$

d'où $pH = -\log N_a$.

58.3.2 pH dans les bases fortes

De même que pour les acides on a :

$$[Base] = [OH^-] = N_b = \frac{10^{-14}}{[H^+]}$$

d'où $pH = -\log N_b$.

58.3.3 Solution neutre

Une solution est neutre si elle vérifie $[H^+] = [OH^-] = 10^{-7}$, donc $pH = 7$.
Remarque 58.3.1. le pH peut être nul ou négatif.

58.3.4 pH dans les acides faibles

Soit C_a la concentration de l'acide. On a :

$$[H_3O^+] = \sqrt{K_a \cdot C_a} \text{ où } K_a \text{ est la constante de l'acide.}$$

D'où $pH = -\log[H_3O^+] = \dfrac{1}{2}(pK_a + pC_a)$, avec $p = -\log$.

58.3.5 pH dans les bases faibles

Soit C_b la concentration de la base. On a :

$$[H_3O^+] = \sqrt{K_b \cdot \frac{K_e}{C_b}} \text{ avec } K_e = [H_3O^+][OH^-]$$

Remarque 58.3.2. L'usage permet de utiliser qu'une seule constante pour le calcul du pH ; en fait a tout base correspond une base et réciproquement : une réaction peut s'écrire dans les deux sens.

Chapitre 59

Solubilité et produit de solubilité

59.1 Hydrolyse des sels

Il s'agit de reconnaître le caractère basique, acide ou neutre d'un sel sans calculer le pH.

Sels dérivant d'un acide fort et une base forte : $[H^+] = [OH^-]$, donc le $pH = 7$ (substance neutre) ;

Sels dérivant d'un acide fort et une base faible : Ces types de sels ont caractère acide ;

Sels dérivant d'un acide faible et une base forte : Ces types de sels ont caractère basique ;

Sels dérivant d'un acide fort et une base faible : On peut rien dire à priori.

59.2 Solubilité et produit de solubilité

Certaines substances sont fortement dissociées en solutions aqueuses, d'autres moyennement ou faiblement.

59.2.1 Étude d'un exemple

$$AgCl \leftrightarrows Ag^+ + Cl^-$$

$k = \dfrac{[Ag^+][Cl^-]}{[AgCl]} \Leftrightarrow [Ag^+][Cl^-] = k[AgCl]$
L'$AgCl$ est peu soluble, donc , $[AgCl] \simeq cte$ d'où $k[AgCl] = cte$.

Soit KpS (ou KS ou PS) la *constante du produit de solubilité* ; $KpS = [Ag^+][Cl^-]$.

Or $[Ag^+] = S$ et $[Cl^-] = S$, donc $KpS = S \cdot S = 10^{-10}$, d'où $S = \sqrt{KpS} = 10^{-5} mol/l$.
$(AgCl) = 143.5 g/mol$, d'où $S = 143.5 \cdot 10^{-5}$.

La solubilité S et le produit de solubilité KpS pour une substance donné ne dépend que de l température.

59.2.2 Solubilité en présence d'un ion commun

Cette théorie concerne le mélange de deux sels ou d'autres substances, dont l'une est peu soluble et l'autre très soluble, et ces deux substances possèdent un ion commun.

59.2.3 Étude d'un exemple

$$\begin{aligned} AgCl &\leftrightarrows Ag^+ + Cl^- \\ KCl &\leftrightarrows K^+Cl^- \end{aligned}$$

$KpS_{AgCl} = 10^{-10}$, $[KCl] = 10^{-1} mol/l$

Le problème consiste à déterminer l'évolution de la solubilité.

$KpS = [Ag^+][Cl^-] = [Ag^+]([Cl^-]_{AgCl} + [Cl^-]_{KCl}) = S(S+M) = S(S+10^{-1})$.
Or $KpS = 10^{-10} \Leftrightarrow S(S+10^{-1}) = 10^{-10} \Leftrightarrow S^2 + S10^{-1} - 10^{-10}$.
La solubilité est la solution positive de ce trinôme de deuxième degré.

Remarque 59.2.1. Concrètement il arrive de simplifier le travail : $S(S+10^{-1}) = 10^{-10} \Leftrightarrow S(0+10^{-1}) = 10^{-10}$, car $[Cl^-]_{AgCl}$ est peu dissocié.

$S = 10^{-9}$; la solubilité a donc diminué.

Chapitre 60

Thermochimie

La thermochimie a pour but de mesurer les quantités de chaleur (énergies) qui sont mises en jeux dans les relations chimiques.

60.1 Rappels

Petite calorie

C'est la quantité de chaleur qu'il faut fournir é $1g$ d'H_2O pour augmenter sa température de $1°C$.

Remarque 60.1.1. $1\ KCal = 10^3\ Cal$.

Chaleur spécifique

C'est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la quantité de masse pour augmenter sa température de $1°C$.

$$Q = mc\Delta T \Leftrightarrow c = \frac{Q}{m\Delta T}$$

Chaleur de fusion

C'est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à un corps pour le fondre à température et pression constante.

Chaleur spécifique ou de vaporisation

C'est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la quantité de masse pour le faire passer du stade liquide au stade gazeux à température et pression constante.

60.2 Équations thermochimiques

60.2.1 Réaction

Une réaction s'écrit symboliquement :

$$\text{système initiale} \rightarrow \text{système final} + Q$$

- si $Q > 0$ la réaction est exothermique ;
- si $Q < 0$ la réaction est endothermique ;

– si $Q = 0$ la réaction est athermique.

On définit la *variation d'enthalpie* $\Delta H = -Q$.

Remarque 60.2.1. En thermochimie les quantités de chaleur mises en jeux dans une réaction se rapportent aux molécules-grammes.

60.2.2 Changement d'état

Les quantités de chaleur peuvent être liés à des réactions qui déterminent un changement d'état physique.

60.3 Chaleur de réaction, de combustion et de formation

Chaleur de réaction

C'est la quantité mise en jeux dans une réaction chimique bien déterminée.

Chaleur de combustion

Lorsque le réaction chimique est une combustion on parle de chaleur de combustion.

Chaleur de formation

C'est la chaleur nécessaire pour former un composé chimique

Remarque 60.3.1. Une chaleur de formation peut être négative.

60.4 Loi de Hess

$$\text{système initiale [réactif(s)]} \rightarrow \text{système final [produit(s)]} + Q$$

on a la relation suivante :

$$\sum_S - \sum_S = Q$$

où $\sum_R$ est la somme des chaleurs de formation des corps réactifs, et $\sum_S$ la somme des chaleurs de formation des corps produits.

Remarque 60.4.1. Les éléments O_2, Cl_2, N_2, ... sont considérés, en première approximation, comme ayant chaleur de formation nulle.

Septième partie

Informatique

Chapitre 61

Algèbre de Boole

61.1 Les opérateurs

61.1.1 Conjonction ou intersection : AND $\wedge(\cap)$

L'opérateur AND est analogue entre l'intersection de deux ensembles

P	Q	P $\wedge$ Q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

61.1.2 Disjonction ou réunion : OR $\vee(\cup)$

OR est le ou non-exclusif : ou P ou Q ou les deux.

P	Q	P $\vee$ Q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

61.1.3 Négation : NOT $(\overline{NOT})$

P	$\overline{P}$
F	V
V	F

61.2 Définitions

On a deux opérations : somme et produit.

somme

+	0	1
0	0	1
1	1	1

produit

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

61.3 Fonctions booléennes

X	Y	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{14}	Z_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Z_0 : fonction constante 0 (contradiction)
Z_1 : $X \cdot Y$ (AND logique, X AND Y)
Z_3 : X (identité)
Z_5 : Y (identité)
Z_6 : $\overline{X} \cdot Y + Y \cdot \overline{Y}$ (OU exclusif)
Z_7 : $X + Y$ (OR logique, X OR Y)
Z_8 : $\overline{Z}_7 = \overline{X + Y}$: fonction NOR
Z_9 : $X \Leftrightarrow Y$ (double implication : $X \Rightarrow Y$ AND $Y \Rightarrow X$)
Z_{13} : $X \Rightarrow Y$(implication) : $\overline{X} + Y$
Z_{14} : $\overline{Z}_1 = \overline{X \cdot Y}$ (fonction NAND)
Z_{15} : fonction constante 1 (tautologie)
Les 8 fonctions $Z_8, \ldots, Z_{15}$ sont obtenues à partir de celles $Z_7, \ldots, Z_0$ par simple négation.

61.4 Lois de l'algèbre de Boole

1. double négation : $\overline{\overline{x}} = x$;
2. idempotence : $x + x = x$ et $x \cdot x = x$;
3. constance : $x + 0 = x$, $x + 1 = 1$ et $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot 1 = x$;
4. complémentarité : $x + \overline{x} = 1$ et $x \cdot \overline{x} = 0$;
5. distributivité : $x + (yz) = (x + y)(x + z)$ et $x(y + z) = xy + xz$;
6. loi de Morgan : $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ et $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$;
7. absorption : $x + xy = x$ et $x(x + y) = x$;
8. commutativité : $x + y = y + x$ et $xy = yx$.

61.5 Tables de Karnaugh

C'est une technique graphique pour établir des expressions logiques d'une fonction booléenne. On rassemble le plus de cellules adjacents possible (nombre paire de cellules).

61.5.1 Table à 2 variables

		P
	0	1
Q	2	3

61.5.2 Table à 3 variables

		Y	Y	
			X	X
	0	2	6	4
Z	1	3	7	5

61.5.3 Table à 4 variables

			b	b	
				a	a
		0	4	12	8
	d	1	5	13	9
c	d	3	7	15	11
c		2	6	14	10

Chapitre 62

Représentation de l'informatique

62.1 Codage d'un nombre

La représentation d'un nombre dans une chaîne de base s :

$$N = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0 s^0$$

Exemple 62.1.1. $123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

62.2 Le système binaire

62.2.1 Addition

$+$	0	1
0	0	1
1	1	${}^1 0$

62.2.2 Soustraction

$-$	0	1
0	0	1
1	${}^1 1$	0

62.2.3 Multiplication

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

62.3 Système octal

Les quatre opérations s'effectuent de la même manière que dans les bases 2 et 10.

Conversion octal $\Leftrightarrow$ binaire

$$(011010)_2 = (32)_2, \text{ car } (011)_2 = (3)_8 \text{ et } (010)_2 = (2)_8$$

$$(4031)_8 = (100000011001)_2, \text{ car } (4)_8 = (100)_2, (0)_8 = (000)_2, (3)_8 = (011)_2, (1)_8 = (001)_2$$

Chapitre 63

Programmation en Pascal

63.1 Généralités du langage Pascal

```
PROGRAM Program_Name;
    {Comments}

    CONST
        Variable1 = x;

    VAR
        Var1, Var2: VarType1;
        Var3: VarType2;

BEGIN
    ...
    {Program structure}
    ...
END.
```

Les identificateurs sont des noms, qui doivent suivre des règles :
- Ils doivent commencer par une lettre ;
- Ils peuvent contenir seulement caractères alphanumériques non accentués ;
- Ils ne peuvent pas contenir des signes particuliers et d'espaces, à l'exception de '_' ;
- La longueur maximale d'un identificateur est 255 caractères ;
- Il n'y a aucune différence entre majuscules et minuscules.

Pour affecter on utilise ' :=', par exemple : '`x := 5`' (on affecte à x la valeur 5).
La déclaration des constantes, qui doit précéder la déclaration des variables, a la syntaxe suivante :

```
Const_Name = Value;
```

63.1.1 Types de variables

- `n: integer`
  La variable n contient un nombre entier compris entre -32'768 et 32'767.
- `m: longint`
  La variable m contient un nombre entier compris entre -2'147'483'646 et 2'147'483'647.

- `x: real`
  La variable x contient un nombre réel.
  Le plus grande nombre réel est $3.4 \cdot 10^{38}$; le plus petit nombre réel positif (le plus proche de 0) est $1.2 \cdot 10^{-38}$
- `b: boolean`
  La variable b peut avoir seulement les valeurs true ou false.
- `c: char`
  La variable c prend des valeurs de la table ASCII.
- `s1: string`
  `s2: string[MaxLenght]`
  Les variables $s1$ et $s2$ sont des chaînes de caractères, et peuvent contenir jusqu'à 255 et `MaxLenght` caractères respectivement (où `MaxLenght` est un entier positif ≤ 255).

63.1.2 Les entrées et les sorties

Les instructions `READ` et `READLN` sont utilisées pour lire des variables (clavier ou fichier). `READ` lit simplement une valeur ; `READLN` lit une valeur et va à la ligne suivante :

```
read(Variables_List;)
readln(Variables_List;)
readln;
```

`Variable_Liste` est une liste de variables. Si on lit dans un fichier, la première variable contient le parcours du fichier :

```
Read(FilePath, V1, V2);
```

Remarque 63.1.1. `Read(x, y, z, bool, nbr, str);` est équivalent à :

```
Read(x);
Read(y);
Read(z);
Read(bool);
Read(nbr);
Read(str);
```

Les instructions `WRITE` et `WRITELN` sont utilisées pour écrire dans un ficher ou à l'écran :

```
write(Expression);
writeln(Expression);
writeln;
```

`Expression` c'est une expression ou plusieurs expressions séparées par des virgules.

Exemple 63.1.1. `Writeln('Write a number:', number);`

Cette expression affiche `'Write a number : xxx'` (`xxx` la veluer affectée à la variable `nbr`).

Remarque 63.1.2. les nombres entiers, par défaut, sont affichés avec un champ de longueur 8. Pour changer la longueur du champ utiliser l'expression suivante :

```
Writeln('Write a number:', number:length);
```

Remarque 63.1.3. Pour les nombres réels on doit spécifier la longueur du champ et le nombre de chiffres de la partie fractionnaire :

```
Writeln('Write a number:', number:length1:length_frac);
```

Remarque 63.1.4. Pour afficher l'apostrophe, il faut écrire une double apostrophe :

```
writeln('Aren''t');
```

63.1.3 Manipulations des chaînes de caractères

Fonction	Action
`concat(string1, string2, ...)`	concatène un groupe de chaînes
`copy(source, position, length)`	retourne une partie d'une chaîne
`include(source, destination, position)`	ajoute une sous-chaîne dans une chaîne
`length(string)`	détermine la longueur d'une chaîne
`omit(string, start, length)`	supprime une partie de la chaîne
`pos(string, text)`	cherche l'occurrence du texte dans une chaîne

Exemple 63.1.2.

```
MyString := 'String number 1';
MyString[15] := '2';
```

`MyString` devient `'String number 2'7`

63.1.4 Les fonctions standard

Fonction	Action
`chr(x)`	détermine le caractère ASCII représenté par x
`ord(x)`	détermine le code ASCII du caractère x
`pred(x)`	détermine le prédécesseur de x
`succ(x)`	détermine le successeur de x
`abs(x)`	calcule la valeur absolue de x
`round(x)`	arrondit la valeur de x à l'entier le plus près
`trunc(x)`	tronque la partie décimale de x
`sqr(x)`	x^2
`sqrt(x)`	$\sqrt{x}$
`exp(x)`	calcule e^x
`ln(x)`	calcule le logarithme naturel de x
`sin(x)`	calcule le sinus de x, en radian
`cos(x)`	calcule le cosinus de x, en radian

63.2 Les structures de contrôles

Une structure de contrôle a pour but d'effectuer une ou plusieurs instructions sous le contrôle d'une expression logique ou d'une variable. On différencie :

Boucles conditionnelles. Elles répètent une tâche dont on ne connaît pas le nombre de répétitions :

```
WHILE ... DO
 REPEAT ... UNTIL
```

Boucles inconditionnelles. Elles exécutent un groupe d'instructions un nombre des fois bien précis :

```
FOR ... TO ... DO
FOR ... DOWNTO ... DO
```

Exécution conditionnelle. On effectue un test logique et on décide ensuite l'action basée sur résultat du test :

```
IF ... THEN ... ELSE
```

Sélection .

```
CASE ... OF ... OTHERWISE
```

63.2.1 Boucles conditionnelles

```
WHILE condition DO
    BEGIN
        Instruction(s)
        change condition
    END;

REPEAT
    Instruction(s)
    change condition
UNTIL condition;
```

Remarque 63.2.1. Dans la structure `WHILE ... DO` la condition est examinée à l'entrée ; dans le cas de `REPEAT ... UNTIL` le condition est examinée à la fin.

Remarque 63.2.2. Dans le cas de `WHILE ... DO` les instructions sont encadrées entre `BEGIN` et `END` ; ce n'est pas le case de `REPEAT ... UNTIL`.

63.2.2 Boucles inconditionnelles

```
FOR Control_Variable:= BeginValue TO EndValue DO
        instruction;

FOR Control_Variable:= BeginValue DOWNTO EndValue DO
        instruction;

FOR Control_Variable:= BeginValue TO EndValue DO
    BEGIN
        instructions
    END;

FOR Control_Variable:= BeginValue DOWNTO EndValue DO
    BEGIN
        instructions
    END;
```

Remarque 63.2.3. on doit connaître à l'avance le nombre de fois que le(s) instruction(s) doit être exécutée(s).

63.2.3 Exécution conditionnelle

```
IF condition THEN
    instruction;

IF condition THEN
    instruction
```

```
ELSE
    instruction;

IF condition THEN
    BEGIN
        instructions;
    END;

IF condition THEN
    BEGIN
        Instructions;
    END
ELSE
    BEGIN
        Instructions;
    END;
```

Remarque 63.2.4. Il ne faut absolument pas introduire un point-virgule avant else!!!

63.2.4 Sélection

```
CASE Control_Variable OF
    Value1:
        BEGIN
            Instruction(s);
        END;
    Value2:
        BEGIN
            Instruction(s);
        END;
    ValueX..ValueY:
        BEGIN
            Instruction(s);
        END;
 OTHERWISE
        BEGIN
            Instruction(s);
        END;
END;
```

63.3 Les procédures

Une procédure est un moyen de contrôler la complexité de grands programmes. Une procédure est un module de programme auquel on peut faire référence par son nom.

```
PROCEDURE Procedure_Name;
    BEGIN
        Instruction(s);
    END;
```

L'instruction `Procedure_Name` appelle la procédure.

Les procédures doivent être déclarées avant le programma principal. Voici l'ordre de déclaration :

```
PROGRAM Program_Name;
    {Comments}

    CONST
        Variable1 = x;

    VAR
        Var1, Var2: VarType1;
        Var3: VarType2;

    PROCEDURE Procedure_Name;
        VAR
            VarP1, VarP2: VarType;
        BEGIN
            Instruction(s);
        END;

BEGIN
    ...
    {Program structure}
    ...
    Procedure_Name {Call the procedure}
    ...
END.
```

Remarque 63.3.1. On peut déclarer plusieurs procédures.

Remarque 63.3.2. On peut déclarer une procédure dans une procédure.

Les variables `Var1`, `Var2` et `Var3` ont été déclarées dans le programme principal. Ces variables sont appelées *variables globales* et peuvent être utilisées n'importe où dans la procédure et dans le programme principal.

Les variables `VarP1` et `VarP2` sont des *variables locales*. Ces variables locales ne peuvent pas être appelées à l'intérieur du programme principal.

63.3.1 Les paramètres

Il est parfois plus commode d'utiliser une procédure en lui donnant des arguments :

```
PROCEDURE Procedure_Name([VAR] Argument1: VarTypeX; Argument2: VarTypeY);
    BEGIN
        Instruction(s);
    END;
```

`Argument1` et `Argument2` sont des *paramètres formels*, déclarés par la liste de paramètres contenus dans l'en-tête. On peut appeler la nouvelle version de la procédure depuis le programme principal, par

```
PROCEDURE Procedure_Name(Var1, Var2)
```

Le mot clé `VAR` transmet un ou plus arguments par adresse.
Un argument transmit par adresse peut être modifié et implique l'utilisation obligatoire d'une variable comme argument effectif dans l'appel de la procédure.

63.4 Les Fonctions

On a déjà rencontré plusieurs fonctions standard en Pascal. De la même manière qu'une procédure a un effet, une fonction a un valeur. Syntaxiquement, un appel de procédure peut être considéré comme une instruction, tandis qu'un appel de fonction peut être considéré comme un *facteur*.

La déclaration et la syntaxe d'une fonction est semblable à celle d'une procédure :

```
FUNCTION Function_Name(Argument1: VarTypeX; Argument2: VarTypeY): VarTypeFunc;
    CONST
        Constant(s)

    VAR
        Var(s)

    BEGIN
        Instruction(s);
    END;
```

63.5 Types définis par l'utilisateur

63.5.1 Les types énumérés

Un type énuméré est défini par la liste de valeurs que peut prendre une variable de ce type :

```
TYPE
    Semaine = (Lundi, Mardi, Mercredi, Jeudi, Vendredi, Samedi, Dimanche);

VAR
    Jour: Semaine;
```

Les deux déclarations peuvent être combinées en une seule :

```
VAR
    Jour: (Lundi, Mardi, Mercredi, Jeudi, Vendredi, Samedi, Dimanche);
```

Les noms des valeurs listées dans la définition d'un type énuméré sont les constantes de ce type. Donc on peut écrire :

```
Jour := Lundi;
```

Remarque 63.5.1. Le type prédéfini `boolean` est lui-même un type énuméré.

Les fonctions `pred` et `succ` peuvent avoir des arguments dy type énuméré et retourner une valeur de même type que l'argument : `succ (Lundi) = Mardi`.
La fonction `ord` peut également avoir un argument de type énuméré et retourne le numéro de l'identificateur dans la liste de définition du type. La première valeur dans la liste a le numéro zéro, et ainsi de suite.

Il n'est pas possible de lire ou d'écrire directement les valeurs d'un type énuméré. Mais on peut utiliser l'instruction `write (ord (Jour))` qui imprime le numéro de la variable `Jour`.

63.5.2 Les types intervalles

Un type intervalle est défini par deux constantes, par exemple :

```
TYPE
    Octet = 0..255;
    Lettre = 'a'..'z';
    Chiffre = '0'..'9';
    JourOuvrable = Lundi..Vendredi;
    Index = 1..20;
```

Remarque 63.5.2. Les intervalles ne doivent pas avoir de trous.

63.6 Les tableaux

63.6.1 Définition

Le tableau est une collection ordonnée de variables ayant toutes le même type. La déclaration d'un tableau se place dans la déclaration des variables et se définit par le type de son indice et de ses éléments :

```
VAR
    TableName = ARRAY[1..x] of real;
```

Le type de l'indice de `TableName` est `1..x`, où x est la valeur maximale. Ses éléments sont de type `real`.

Il est en général préférable d'utiliser un identificateur dy type pour désigner le type de l'indice :

```
TYPE
    IndiceName = 1..x;
    TableName = ARRAY[IndiceName] of real;

VAR
    Table1: TableName;
```

Exemple 63.6.1. On considère un vecteur dans l'espace. On déclare le vecteur de la façon suivante :

```
TYPE
    axes = 1..3;
    vect = array[axes] of real;

VAR
    Vector: vect;
```

Le type de l'indice peut aussi être un type énuméré déterminé par le programmeur :

```
TYPE
    direction = (x, y, z);
    vect = array[direction] of real;
```

On peut alors définir des variables de type `direction` et `vecteur` :

```
VAR
    s, t: direction;
    u, v: vecteur;
```

Une variable de type `vecteur` a trois éléments, chaque élément correspond à une des trois valeurs du type `direction`. Les trois éléments de v sont donc : $v[x], v[y], v[z]$

63.6.2 Tableaux à plusieurs dimensions

Le type d'un élément de tableau peut être un tableau. Dans les déclarations suivantes, le type d'un élément de *matrix* est *column*.

```
CONST
    Size = 10;

TYPE
    Index = 1..Size;
    Column = ARRAY [Index] of real;
    Matrix = ARRAY [Index] of Column;
```

On peut incorporer la déclaration de `column` dans la déclaration de `matrix` :

```
TYPE
    Matrix = ARRAY [Index] of ARRAY [Index] of Real
```

ou simplement

```
TYPE
    Matrix = ARRAY [Index, Index] of Real
```

Maintenant déclarons quelques variables :

```
VAR
    a : Matrix;
    s, t: Index;
```

La colonne s de la matrice a est le composant $a[s]$.
Le composant t de colonne est une variable réelle qui peut être écrit $a[s][t]$ ou simplement $a[s,t]$.

63.7 Les tries

63.7.1 Tri par insertion

L'idée est d'insérer les éléments à leurs place par rapport à ceux déjà placés.

Algorithme

```
FOR i:=2 TO n DO
    BEGIN
        a[0] := a[i]

        Insérer a[0] à la bonne place dans la chaîne.
    END;
```

Remarque 63.7.1 *(Insértion dichotomique).* On compare le nouvel élément à l'élément milieu de la suite déjà triés.

63.7.2 Extraction simple (sélection)

- Sélection de plus petit élément ;
- Échanger cet élément avec le premier ;
- Répéter le processus avec les $n-1$ élément restants.

Algorithme

```
FOR i:=1 TO n-1 DO
    BEGIN
        Affecter l'indice de plus petit élément de la suite à k;
        Échanger le terme i (le plus petit de la suite) et le terme k.
    END;
```

Remarque 63.7.2. Ce tri est en général meilleur que le tri par insertion.

63.7.3 Permutation simple (tri bulle)

C'est un échange de couples adjacentes.

Algorithme

```
FOR i:=2 TO n DO
    BEGIN
        FOR j:=n DOWNTO i DO
            Échanger a[j-1] et a[i] si nécessaire.
    END;
```

Remarque 63.7.3 *(Amélioration).* On peut tenir compte d'une partie de la suite qui est déjà triée ; pour cela il faut mémoriser l'endroit de la dernière permutation.

Remarque 63.7.4. Si l'élément le plus "lourde" est placé au début de la suite on peut échanger le sens du tri à chaque passage :

- Monter la bulle la plus légère ;
- Descendre la bulle la plus lourde ;
- Monter la bulle la plus légère ;
- ...

Ce tri est appelé *Tri Shaker*

63.7.4 Tri de Shell

Shell a imaginé d'accélérer le tri en commençant par faire des passes successives pour "dégrossir" le "désordre" initial, avant d'effectuer le tri définitif. Pour cela l'échange ne sera effectué qu'après une comparaison par sauts successifs qui décroissent à chaque passage.

À chaque passage les nombres plus petits se rapprochent du début de la suite, sans pour autant que ce dernier soit totalement trié ; on termine ensuite le tri par saut de un.

Algorithme

```
...
saut := longueur_tableau;
WHILE saut>1 DO
    BEGIN
        saut := nouveau_saut;

        REPEAT
            FOR m:=1 TO longueur-saut DO
                BEGIN
                    n := m + saut;
```

```
                Échanger a[m] et a[n] si nécessaire.
            END;
        UNTIL Fin_tri
    END;
```

Choix des incréments

Le choix du pas n'est pas justifiable mathématiquement, mais l'expérience montre que de choisir la moitié de la longueur du tableau et de nouveau la moitié et ainsi de suite.

Un choix meilleur c'est celui de prendre une de ces suites :

1. $k_n = 3k_{n-1} + 1 : 1, 4, 13, 40, 121, \ldots;$
2. $k_n = 2k_{n-1} - 1 : 1, 3, 7, 15, 31.$

63.7.5 Tri par fusion

L'idée est de diviser le problème en sous-problèmes plus simples, qui ont moins d'éléments à trier ; on utilise la récursivité pour diviser les sous-problèmes en sous-sous-problèmes, jusqu'à on obtient des tableaux de un ou deux éléments. Ensuite on génère un méthode pour rassembler deux tableaux triés en un seul tableau trié.

Huitième partie

Annexes

Bibliographie

[1] Grogono Peter, *La programmation en Pascal* traduit pas Sylvie Vignes, InterEditions, 1992

Annexe A

Changements

Version 1.0a (10.06.2001) : Première version finale.

Annexe B

Page de test

Utilisez cette page pour tester votre imprimante.

Si les symboles mathématiques ne sont pas imprimés correctement changez la configuration de l'imprimante.

Si après plusieurs essais vous n'arrivez pas au bon résultat téléchargez les derniers drivers de l'imprimante et/ou contactez le service technique.

B.0.6 Matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

B.0.7 Intégrales

$$\int_a^b \left(\frac{x^3 + 5x}{17} \right) dx$$

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx$$

Fin de la page de test.