Contrôle d'analyse II N°2

Durée : 1 heure 30 minutes Barème sur 15 points

NOM : ______________________

PRENOM : ______________________

Groupe ☐

1. Résoudre l'équation suivante sur l'intervalle donné.

$$\sin^3(x) + \tfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,\big[\cos(x)+1-\sin(x)\big]\cdot\sin(x)\cdot\big[\cos(x)+1\big] - \big[\cos(x)+1\big]^3 = 0\,,$$

$$x \in [0,\pi]\,. \qquad S = \left\{\tfrac{\pi}{3}\,,\,\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{2\pi}{3}\,,\,\pi\right\}$$ 4 pts

2. On considère un triangle ABC et on note

$$a = BC\,,\quad b = AC\,,\quad c = AB \qquad \text{et} \qquad \alpha = \widehat{BAC}\,,\quad \beta = \widehat{ABC}\,,\quad \gamma = \widehat{ACB}\,.$$

De ce triangle ABC, on connaît la mesure des trois côtés a, b et c :

$$a = 2\,,\qquad b = 4 \qquad \text{et} \qquad c = 3\,.$$

On considère le point I du segment BC tel que la droite AI soit la bissectrice de l'angle α.

Déterminer, sans machine à calculer, la mesure exacte du segment AI. 5,5 pts

$AI = \frac{6}{7}\cdot\sqrt{15}\,.$

3. Résoudre l'équation suivante :

$$\arctan(1-x) + \arctan(x) + \arctan(1+x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$ 3 pts

$S = \{0\,,\,2\}$

4. Résoudre l'inéquation suivante en fonction de la base a, $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$.

$$a^x - 3\,a^{-x} \le 2\,.$$ 2,5 pts

Si $0 < a < 1$, $S = [\log_a(3)\,,\,+\infty\,[$, si $a > 1$, $S = \,]-\infty\,,\,\log_a(3)]$

Tourner la page

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\, \cos y + \cos x\, \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\, \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\,[\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}\,[\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\,[\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ **et** $\tan x$ **en fonction de** $\tan(\frac{x}{2})$ **:**

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$