Contrôle d'analyse II N°2

Durée : 1 heure 45 minutes Barème sur 20 points

NOM : ____________________

PRENOM : ____________________

Groupe ☐

1. Donner les solutions de l'équation suivante :

$$3\cot g(2x) + \operatorname{tg}(x) - 4 + \frac{3}{\sin^2(x)} = 0$$

sur le domaine $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$. 4,5 pts

2. Résoudre l'équation suivante :

$$\operatorname{Arctg}\left(-\frac{x^2}{3}\right) + 2\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$ 5 pts

3. Résoudre l'inéquation suivante :

$$\log_a(2\cos(x)+1) + \log_a(\cos(x)) \geq 0, \qquad x \in [0, 2\pi],$$

i) pour $a = 3$,

ii) puis, pour $a = \frac{1}{3}$. 4,5 pts

4. On considère deux triangles isocèles ABC et ADC vérifiant :

$$AB = AC = c, \quad AD = DC = BC = a, \quad \frac{c}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (nombre d'or)}$$

On note les angles comme suit :

$$\alpha = \widehat{BAC}, \quad \theta = \widehat{ABC} = \widehat{ACB}, \quad \beta = \widehat{CAD} = \widehat{DCA}.$$

Sans utiliser de calculatrice,

i) déterminer $\cos\theta$,

ii) démontrer que $\cos(2\alpha) = \cos\theta$,

iii) déduire, sans calculatrice, la mesure exacte de l'angle α,

iv) montrer que les cercles circonscrits au triangle ABC et au triangle ADC ont le même rayon. 6 pts

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x\ \operatorname{tg} y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \operatorname{tg}^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\ [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}\ [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\ [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ **et** $\operatorname{tg} x$ **en fonction de** $\operatorname{tg}(\frac{x}{2})$ **:**

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1-\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}$$